DER

TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

GEWIDMET ZUR FEIER IHRES

HUNDERTJÄHRIGEN

BESTEHENS

Darstellenden Geometrie einzuführen. Es ist jedoch bei jeder Art von Angewandter Mathematik erfolgreicher, einfache Aufgaben wirklich durchzuarbeiten, als allgemeine Theoreme kennenzulernen, ohne ihre Bedeutung für den Einzelfall zu erproben.

Bei der Abfassung des Textes erfreute ich mich der Mitarbeit von Herrn Privatdozent Dr. Rosemann und spreche ihm auch hier meinen Dank dafür aus. Um den Preis des Buches niedrig zu halten, sind die Abbildungen nicht, wie sonst üblich, beim Verlag umgezeichnet, sondern unmittelbar nach den von mir hergestellten Zeichnungen reproduziert. Mich trifft daher die Verantwortung nicht nur für die Richtigkeit, sondern auch für das Aussehen der Abbildungen. Dem Teubnerschen Verlag blieb daneben die Erfüllung noch mannigfacher Wünsche überlassen, und ich habe auch diesmal für das gewohnte Entgegenkommen zu danken.

Für die Überlassung der Abbildungen 77 und 98 bin ich der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft Berlin und der Firma Bohle & Cie., G. m. b. H., Köln zu Dank verpflichtet.

Hannover, im Mai 1931.

Horst v. Sanden.

Darstellenden Geometrie einzuführen. Es ist jedoch bei jeder Art von Angewandter Mathematik erfolgreicher, einfache Aufgaben wirklich durchzuarbeiten, als allgemeine Theoreme kennenzulernen, ohne ihre Bedeutung für den Einzelfall zu erproben.

Bei der Abfassung des Textes erfreute ich mich der Mitarbeit von Herrn Privatdozent Dr. Rosemann und spreche ihm auch hier meinen Dank dafür aus. Um den Preis des Buches niedrig zu halten, sind die Abbildungen nicht, wie sonst üblich, beim Verlag umgezeichnet, sondern unmittelbar nach den von mir hergestellten Zeichnungen reproduziert. Mich trifft daher die Verantwortung nicht nur für die Richtigkeit, sondern auch für das Aussehen der Abbildungen. Dem Teubnerschen Verlag blieb daneben die Erfüllung noch mannigfacher Wünsche überlassen, und ich habe auch diesmal für das gewohnte Entgegenkommen zu danken.

Für die Überlassung der Abbildungen 77 und 98 bin ich der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft Berlin und der Firma Bohle & Cie., G. m. b. H., Köln zu Dank verpflichtet.

Hannover, im Mai 1931.

Horst v. Sanden.

Inhaltsverzeichnis

Verteilung der Abbildungen auf die Tafeln.

Abb	Taf.	Abb.	Taf.	Abb.	Taf.	Abb.	Taf.
1	1	30	6	59	20	88	33
2	1	31	8	60	21	89	34
3	1	32	8	61	20	90	34
4	1	33	9	62	23	91	34
5	1	34	9	63	22	92	35
6	2	35	10	64	22	93	37
7	12	36	10	65	24	94	37
8	2	37	11	66	23	95	35
9	2	38	11	67	25	96	36
10	2	39	11	68	25	97	36
11	3	40	11	69	24	98	36
12	3	41	11	70	26	99	37
13	3	42	11	71	27	100	37
14	12	43	12	72	27	101	38
15	3	44	13	73	28	102	39
16	13	45	14	74	29	103	38
17	3	46	14	75	26	104	39
18	3	47	16	76	29	105	39
19	4	48	15	77	28	106	41
20	4	49	15	78	30	107	40
21	4	50	16	79	30	108	40
22	5	51	16	80	30	109	40
23	4	52	17	81	31	110	40
24	5	53	17	82	31	111	41
25	6	54	18	83	32	112	41
26	7	55	21	84	32	113	42
27	13	56	18	85	33	114	42
28	7	57	19	86	33		
29	7	58	19	87	34		

Einleitung.

In der darstellenden Geometrie wird gelehrt, wie man Bilder von irgendwelchen Gegenständen zeichnet, und umgekehrt, wie man sich aus Bildern eine deutliche Vorstellung der abgebildeten Objekte verschafft.

Folglich, wird hier eingewendet werden, ist es vernünftiger, sich einen Photoapparat statt ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie zu kaufen. Dann bekommt man durch einen Knips ein Bild, und was beim Betrachten von Photographien noch viel zu lernen ist, bleibt vollends schleierhaft.

Nun kann man aber doch Gegenstände, die gar nicht existieren, bekanntermaßen (trotz Spiritismus) nicht photographieren. Wenn ein Ingenieur von einer Maschine oder ein Baumeister von einem Hause, das er sich ausgedacht hat, ein Bild machen will, dann hilft ihm kein Photoapparat, sondern nur die darstellende Geometrie.

Eine Fliegeraufnahme ist lustiger anzusehen und schneller herzustellen wie eine Landkarte. Aber der schönsten Aufnahme kann man nicht entnehmen, wie hoch etwa der Monte Pizzicato, oder wie breit der Lago Adagio ist. Das läßt aber eine Landkarte feststellen; wenn auch, je nach der Fertigkeit im Kartenlesen, mit mehr oder weniger Schwierigkeit. Eine Karte hat also doch ihre Daseinsberechtigung.

Will man sich ein neues Haus genau so bauen lassen, wie ein bereits vorhandenes, damit die Möbel nach dem Umzug ins neue hineinpassen, so ist dem Baumeister recht wenig damit gedient, wenn man ihm ein ganzes Album von Photos des alten Hauses übergibt. Er könnte diesen ja qualitativ manches über dessen Stil entnehmen, keineswegs aber zuverlässige Abmessungen.

Diese Beispiele sollen zeigen: Es ist vielfach notwendig, von einem vorhandenen oder erst gedachten Objekt, Bilder oder Zeichnungen zu machen, aus denen man dessen Abmessungen entnehmen kann. Und wieder wendet vielleicht jemand ein, daß die Abmessungen ja in einer Liste notiert werden können, ohne daß ein Bild nötig wird. Um z. B. einen Schrank zu bestellen, brauchte man ja nur seine Breite, Tiefe und Höhe anzugeben. Nun, bei einem — nicht nur aus einem Würfel oder gar einer Kugel — bestehenden Hause oder einer Maschine käme dabei aber doch eine recht lange Liste aller Abmessungen zustande, aus der sich schließlich kein Werkmeister ein Bild machen könnte, was eigentlich gebaut werden soll. Also muß eine Zeichnung

nicht nur die Abmessungen des Objektes feststellen lassen, sondern sie muß auch ein deutliches Bild von ihm geben. Beides läßt sich allerdings nur unter der Voraussetzung vereinigen, daß der Beschauer „Zeichnungen lesen" kann. Dazu gehört eine gewisse Schulung, und diese vermittelt die darstellende Geometrie.

Zeichnungen lesen können, heißt nämlich die Fähigkeit, beim Betrachten einer Zeichnung im Raume *vor* dem Papier den dargestellten Gegenstand deutlich zu „sehen"; so greifbar deutlich, daß man ihn glaubt betasten zu können und keinerlei Zweifel über seinen Aufbau, über Größenverhältnisse und Einzelheiten mehr hat. Es ist auch klar, daß nur derjenige eine in diesem Sinne deutliche Zeichnung wird machen können, dem bereits während des Zeichnens das Objekt klar vor Augen steht. Die Ausbildung dieser — innere Raumanschauung genannten — Fähigkeit, bei einer Zeichnung, womöglich schon vor dem Beginn des Zeichnens, den Gegenstand deutlich im Raume vor sich zu sehen, ist der wichtigste Grund, weshalb darstellende Geometrie getrieben wird.

Es ist sehr eindruckvoll, wenn man in einer Fabrik — etwa in der Modelltischlerei — zwei Werkleute sich über eine Zeichnung unterhalten sieht. Wie sie mit den Fingern in der Luft an dem nur vorgestellten Maschinenteil herumtasten, einander auf Einzelheiten hinweisen, mit dem Zollstock Maße nachprüfen und dann an die Herstellung gehen. Oder wenn auf einer geologischen Exkursion der Führer mit der Karte in der Hand die Schichten und ihre Faltungen von der Erde in den Raum hinaus verfolgt und ihnen weiterwandernd nachgeht. Auch im täglichen Leben kann man oft genug die Beobachtung machen, welchen Vorteil es gewährt, sich etwas nicht unmittelbar Sichtbares „vorstellen" zu können.

Eine intensive Pflege der darstellenden Geometrie zur Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist dem konstruierenden Ingenieur unerläßlich; aber auch auf den Schulen dürfte sie als wichtiger Bestandteil allgemeiner Geistesbildung nicht fehlen.

Den Leser dieses Buches bitte ich, immer wieder an diesen eigentlichen Zweck der Beschäftigung mit darstellender Geometrie zu denken: Nicht Projektionsmethoden zu lernen (das kommt ganz von selbst!), sondern zu *sehen*, wie sich die Dinge im Raume gestalten.

Los vom Papier! ist die Losung.

Er wird sehr bald eine eigenartige Wechselwirkung zwischen logischem Schließen und anschaulichem Auffassen an sich wahrnehmen: Bald führt die Anschauung zu geometrischen Sätzen, bald verhilft ein geometrisch-logischer Schluß dazu, die noch fehlende deutliche Vorstellung über die Lage sich etwa gegenseitig teilweise verdeckender Einzelteile zu vollenden. Es ist reizvoll, zu merken, wie allmählich die logischen Schlüsse nur noch im Unterbewußtsein vollzogen werden und die anschauliche Erkenntnis immer mehr überwiegt.

Erstes Kapitel.

Abbildung von Punkten, Geraden und Ebenen in senkrechter Parallelprojektion.

Den Hauptteil dieses Buches wird ein Abbildungsverfahren — die sog. *senkrechte Parallelprojektion* — einnehmen, das die eine Forderung, eine erschöpfende Beschreibung des Gegenstandes zu geben, vollständig erfüllt. Der anderen Forderung, ein deutliches Bild zu bieten, wird zwar auch Genüge getan; es bedarf jedoch einer eingehenden Vorbildung, um Zeichnungen dieser Darstellungsweise lesen zu können, d. h. beim Betrachten der Zeichnung den dargestellten Körper im Raume vor sich zu sehen. Diese Vorbildung soll der erste Abschnitt vermitteln.

§ 1. Abbildung von Punkten.

Wir beginnen mit der *Abbildung der geometrischen Grundelemente* und sehen zunächst zu, wie man einen oder mehrere Punkte, die sich irgendwo im Raume befinden, so auf einem Zeichenblatt abbilden kann, daß man beim Anschauen dieser Zeichnung einen Eindruck von der Lage der Punkte bekommt und durch Messungen an der Zeichnung genau angeben kann, wie die Punkte im Raume liegen.

In der Abb. 1 sind A, B, C, D irgendwelche Punkte im Raum, von denen B und D zufällig genau übereinander liegen. Als Bild- oder Zeichenebene wählen wir eine waagerechte Ebene G_1, die wir als *Grundrißebene* bezeichnen wollen, und fällen von den gegebenen Punkten Lote auf diese Grundrißebene; wir „projizieren" die Punkte senkrecht darauf. Die Durchstoßpunkte A^*, B^*, C^*, D^* dieser „Projektionslote" durch die Grundrißebene sollen die Bildpunkte oder „Grundrisse" der gegebenen Punkte sein. Es ist offenbar gleichgültig, ob die gegebenen Punkte auf der einen oder der anderen Seite der Grundrißebene liegen. Liegt etwa ein Raumpunkt in der Grundrißebene selbst, so fällt er mit seinem Bildpunkte zusammen.

Es leuchtet auch ein, daß das Bild von Raumpunkten in einer anderen waagerechten Ebene G_2 genau so ausfallen wird, wie ihr Bild in der zuerst eingeführten Ebene G_1. Von diesem Umstande macht man Gebrauch, indem man die Grundrißebene in einer solchen Höhe annimmt, daß die abzubildenden Raumpunkte nur auf éiner Seite von ihr, oder in ihr selbst liegen.

Betrachten wir das Bild, das wir auf diese Weise von Raumpunkten erhalten, aus genügender Entfernung, so bekommt man in der Tat einen Eindruck von der Lage der Punkte im Raum. In Abb. 2 bezeichnet G die Grundrißebene von der Seite gesehen,

wobei sie nur als Strich erscheint. P und Q seien wieder zwei Raumpunkte, die nach unserer Vorschrift abgebildet wurden. P^* und Q^* sind die Bildpunkte, während die „Projektionslote“ gestrichelt sind. Mit 𝔄 ist schematisch eine Auge dargestellt, das gleichzeitig die Raumpunkte P und Q sowie die Bildpunkte P^* und Q^* betrachtet. Die Lichtstrahlen, die auf der Netzhaut die Wahrnehmungen der Punkte vermitteln, sind durch die ausgezogenen Linien bezeichnet. Der Eindruck vom Raumpunkt P auf der Netzhaut des Auges ist nun allerdings ein anderer wie derjenige vom Bildpunkte P^* (ebenso ist es bei Q und Q^*). Je weiter jedoch das Auge 𝔄 von der Bildebene G entfernt wird, um so kleiner wird der Winkel zwischen den beiden Sehstrahlen, die nach dem Raumpunkte und dem zugehörigen Bildpunkte führen, so daß es berechtigt ist, zu sagen, die Betrachtung der Bildpunkte gibt nahezu den gleichen Eindruck wie die Betrachtung der Raumpunkte selbst, und zwar ist die Übereinstimmung um so besser, je weiter das Auge von der Bildebene entfernt ist.

Vermittelt uns so unsere Abbildung von Raumpunkten einen unmittelbaren, wenn auch nicht genauen Eindruck von diesen, so fragen wir nun, ob die Abbildung imstande ist, genaue Angaben über die Lage der Punkte im Raume zu bieten. Offenbar ist dies keineswegs der Fall. Auf der Grundrißebene sehen wir einzelne Punkte als Bilder von Raumpunkten und wissen auch, daß — entsprechend unserer Abbildungsmethode — die Raumpunkte selbst auf Loten liegen müssen, die in den Bildpunkten senkrecht auf der Grundrißebene stehen. Dagegen haben wir keinen Anhalt, in welcher Entfernung von der Bildebene sich die abgebildeten Raumpunkte befinden. Liegen zwei Raumpunkte, wie es bei B und D der Fall ist (Abb. 1), senkrecht übereinander, so haben sie den gleichen Bildpunkt $B^* = D^*$, dem wir es gar nicht ansehen können, ob er das Bild von einem oder mehreren Raumpunkten ist. Unser Abbildungsverfahren bedarf also noch einer Erweiterung, um die Höhenlage der abgebildeten Punkte der Zeichnung entnehmen zu können.

Man hilft sich in manchen Fällen dadurch, daß man neben die Bildpunkte eine Zahl schreibt, die in einer verabredeten Längeneinheit — etwa in mm — die Höhe der Raumpunkte über der Grundrißebene angibt. Man kann sogar durch das Vorzeichen dieser Höhenzahlen unterscheiden, ob die Raumpunkte oberhalb oder unterhalb der einmal gewählten Grundrißebene liegen. Man bezeichnet dies als *bezifferten Grundriß*. Diese Methode findet z. B. Anwendung bei Abbildung von so kleinen Teilen der Erdoberfläche, daß von deren Krümmung abgesehen werden kann. Alle in der Landschaft wesentlichen Punkte werden senkrecht auf eine waagerechte Grundrißebene projiziert, und die Höhen von Bergspitzen oder die Tiefe von Gewässern durch Zahlen angegeben.

Für die Abbildung von Gegenständen ist diese Methode aber im allgemeinen viel zu unübersichtlich. Sie verlangt vom Beschauer der Zeichnung gleichzeitig mit dem Betrachten der Bildpunkte eine Auffassung der Zahlen als *Höhenmaße*, und es ist unmöglich, dadurch schnell genug ein hinreichend deutliches Bild über Lage und Abmessungen eines Gegenstandes aus einer Zeichnung zu gewinnen. Wir vervollständigen unser Abbildungsverfahren daher in rein geometrischer Weise dadurch, daß wir eine *zweite Bildebene* zu Hilfe nehmen.

Senkrecht auf der Grundrißebene G (Abb. 3) stellen wir eine zweite Bildebene A_1 auf. Mit a_1 ist der Schnitt beider Ebenen bezeichnet. Nun fällen wir auch auf diese senkrechte Ebene, die wir eine *Aufrißebene* nennen wollen, von den Raumpunkten Lote und erhalten dadurch Bildpunkte in dieser Aufrißebene, die sog. Aufrisse der Punkte. Wie die Abb. 3 erkennen läßt, werden diese Bildpunkte in der Aufrißebene gerade die noch fehlenden Angaben über die Höhenlage der Raumpunkte liefern, so daß also die gleichzeitige Betrachtung der Bilder in der Grundriß- und in einer Aufrißebene ausreicht, um die Lage der Punkte im Raume vollständig festzulegen.

Der Raumpunkt muß senkrecht über seinem Grundriß liegen, und um seine Höhe zu erhalten, brauchen wir nur den Abstand seines Aufrißbildpunktes von der Geraden a_1, die wir *Aufrißachse* nennen wollen, zu messen. Fällen wir nämlich in der Aufrißebene vom Bildpunkte ein Lot auf die Aufrißachse, wie es in Abb. 3 gestrichelt eingezeichnet ist, so sieht man, daß die Länge dieses Lotes gleich dem Abstand des Raumpunktes von der Grundrißebene ist. Liegen im besonderen zwei Raumpunkte übereinander, so bekommen sie in einer Aufrißebene zwei durchaus verschiedene Bilder, die den Höhenunterschied erkennen lassen. Erinnern wir uns an die Abb. 2, so können wir das in der Aufrißebene entstehende Bild der Raumpunkte auffassen als eine Ansicht, die wir gewinnen, wenn wir die Raumpunkte mit einer Blickrichtung senkrecht zur Aufrißebene aus hinreichender Entfernung betrachten. Kurz gesagt, der Grundriß gibt eine Ansicht der Punkte von oben und der Aufriß eine Ansicht von der Seite, wobei die Blickrichtung senkrecht zur Aufrißebene ist. Selbstverständlich bekommen wir in einer Aufrißebene, die der soeben benutzten parallel ist, genau das gleiche Bild.

War jedoch die Grundrißebene durch die Richtung der Erdschwere als waagerechte Ebene ausgezeichnet, so gibt es für eine Aufrißebene keine bevorzugte Lage. Es ist uns vielmehr völlig freigestellt, wie wir eine Aufrißebene wählen, wenn sie nur senkrecht zur Grundrißebene steht. In der Abb. 3 ist noch eine andere, mit A_2 bezeichnete Aufrißebene eingeführt. (a_2 ist die zugehörige Aufrißachse.) In ihr entsteht ein neues Aufrißbild der drei Raum-

punkte, das aber anders aussieht, wie das Bild in der ersten Aufrißebene A_1.

Man wählt die Aufrißebene nun so, daß man von dem ganzen Gegenstande oder Teilen desselben ein besonders deutliches Bild bekommt, und benutzt fast immer *mehrere Aufrißebenen*, entsprechend der Tatsache, daß man sich einen Körper von verschiedenen Seiten ansieht, um den nötigen Überblick zu bekommen.

Würden wir nun das Grundrißbild und die Aufrißbilder, die wir von einer Punktgruppe erhalten, auf einzelnen Zeichenblättern herstellen, so könnten wir sehr wohl durch abwechselndes Betrachten dieser Blätter und Messen der Höhen erschöpfende Angaben über die Lage der Raumpunkte erhalten. Um diese gleichzeitige Betrachtung von Grund- und Aufrißbildern zu erleichtern, hat man eine bestimmte Verabredung getroffen, wie die einzelnen Blätter nebeneinander zu legen sind.

Blicken wir noch einmal auf die Abb. 3. Die Grundrißebene G behält ihre Lage. Die Aufrißebene A_1 — in der Aufrißachse a_1 auf G senkrecht stehend — soll jedoch, nachdem die Abbildung vollzogen ist, um die Aufrißachse herumgeklappt werden und zwar um 90^0, so daß sie in die Grundrißebene hineinfällt. Dieses *Umklappen*, wobei die Aufrißachse die Rolle eines Scharniers spielt, kann nach der einen oder der anderen Seite erfolgen. Es ist zweckmäßig, wenn wir die Aufrißebene von den Raumpunkten hinwegklappen, so daß sie gewissermaßen von den projizierenden Loten, die von den Raumpunkten ausgehen, umgeworfen wird.

Um diese Drehrichtung zu kennzeichnen, wollen wir jede Aufrißachse mit einer Pfeilspitze versehen derart, daß die Umklappung der Aufrißebene, in der Pfeilrichtung gesehen, linksherum erfolgt.

Die solcherweise in die Grundrißebene hineingeklappten Aufrißebenen werden dann ein Bild bieten, wie es die Abb. 4 zeigt: Die Papier- oder Zeichenebene ist die Grundrißebene. Wir sehen zwei durch ihre Pfeilspitzen kenntliche Aufrißachsen a_1 und a_2. Das bedeutet, daß senkrecht über diesen Aufrißachsen Aufrißebenen zu denken sind. Drei Raumpunkte ABC wurden abgebildet. Ihre Grundriße sind A^*, B^*, C^*. Nach der Umklappung der Aufrißebenen entsprechend den Pfeilspitzen sehen wir nun auch die Aufrisse A', B', C' und A'', B'', C'' der drei Punkte in der Zeichenebene vor uns. A^*, B^*, C^* ist die Ansicht der Punkte von oben; A', B', C' ist die Ansicht eines Beschauers, dessen Auge sich etwa bei $\mathfrak{A}_1$ befindet und der waagerecht gegen die erste Aufrißebene blickt; ebenso ist A'', B'', C'' die Ansicht von $\mathfrak{A}_2$ aus gesehen.

Blicken wir noch einmal auf die Abb. 3 und fällen sowohl von dem Aufriß wie auch von dem Grundriß eines Raumpunktes

(gestrichelte) Lote auf die Aufrißachse, so treffen sich diese Lote auf der Aufrißachse, denn sie liegen zusammen mit den (ausgezogenen) Projektionsloten in ein und derselben, zur Aufrißachse senkrechten Ebene. Diese gestrichelten, in den Bildebenen liegenden Lote bleiben auch nach der Umklappung der Aufrißebenen senkrecht zur Aufrißachse (Abb. 4), so daß wir uns als Grundsatz merken: *Die Verbindungsgerade zwischen Grund- und Aufriß eines Raumpunktes ist senkrecht zur Aufrißachse.*

Abb. 5 zeigt noch einmal die Umklappung einer Aufrißebene in der Richtung der Aufrißachse a gesehen (die hier als Punkt erscheint). Man sieht, was wir schon vorher festgestellt haben, daß nach der Umklappung der Abstand des Aufrisses A' eines Punktes A von der Aufrißachse gleich seiner Höhe z_a über der Grundrißebene G ist. Benutzen wir, wie in Abb. 4, zwei Aufrißebenen, so werden wir die Höhe z. B. des Punktes A sowohl im Abstande des Aufrisses A' von der Aufrißachse a_1, wie auch im Abstande des Punktes A'' von der Aufrißachse a_2 finden. Im besonderen hat der Punkt B die Höhe Null; er liegt in der Grundrißebene und fällt mit seinem Bildpunkte B^* zusammen. Der Punkt C liegt dagegen in der ersten Aufrißebene und sein Grundriß C^* daher auf der Aufrißachse a_1; der Grundriß läßt ja die Abstände der Raumpunkte von den Aufrißebenen erkennen.

Die Lage von Punkten im Raume ist durch den Grundriß und eine einzige Aufrißebene vollständig bestimmt, und man kann die Bilder in beliebigen anderen Aufrißebenen aus dem ersten Aufriß ableiten. Ist etwa in Abb. 4 Grundriß A^* und Aufriß A' eines Punktes A gegeben, und führt man durch die Aufrißachse a_2 eine zweite Aufrißebene ein, so erhält man den neuen Aufriß A'', indem man von A^* eine Gerade senkrecht zu a_2 zieht und vom Schnittpunkt mit a_2 die aus dem ersten Aufriß entnommene Höhe z_a des Punktes A abträgt. Die Einführung einer neuen Aufrißebene entspricht vollständig dem Wechsel der Koordinatenebenen in der analytischen Geometrie.

Das Lesen von Zeichnungen besteht im wesentlichen im Verständnis dieses einfachen Zusammenhanges von Grund- und Aufrißbildern.[1])

Leuten, die über keinerlei geometrische Begriffsbildung, wie das Fällen von Loten, Senkrechtstehen und Umklappen von Ebenen usw. verfügen, ist es in der Tat zu schwierig, sich das Prinzip unserer Abbildung in der Weise klar zu machen, wie wir

---

1) Ich empfehle dem Leser, sich diese Abb. 4 so genau zu überlegen, daß ihm die Lage der Punkte und der Aufrißebenen vollkommen deutlich und die ganze Zeichnung *selbstverständlich* erscheint, denn die Erfahrung zeigt, daß ein nicht restloses Verstehen gerade dieser einfachen Sachlage sehr oft als Wurzel von später auftretenden Schwierigkeiten anzusehen ist.

es versucht haben. *Fabrikarbeiter*, die aber doch nach dieser Methode hergestellte Zeichnungen lesen müssen, pflegen sich deren Entstehung auf andere Weise klar zu machen (Abb. 6). Sie denken sich den abzubildenden Gegenstand zunächst in seiner ursprünglichen Lage über der Grundrißebene oder dem Zeichenbrett G und fassen das Grundrißbild so, wie auch wir es getan haben, als „Ansicht" von oben auf. Statt nun eine Aufrißebene A einzuführen, denken sie sich den Gegenstand mit der Aufrißachse starr verbunden und schwenken ihn um die Aufrißachse als Welle um 90^0. Jetzt betrachten sie den gedrehten Körper ebenfalls von oben und erhalten dadurch gerade die Ansicht, die ihnen die in die Grundrißebene hineingeklappte Aufrißebene bieten würde.

Man kann kurz sagen, daß unser Verfahren darauf hinauskommt, sich den im Raume festbleibenden Körper von verschiedenen Seiten, entsprechend den verschiedenen Aufrißebenen, anzusehen, während beim zweiten Verfahren der Körper in verschiedene Lagen gedreht und jedesmal von oben angesehen wird.

§ 2. Abbildung von Geraden.

Um eine Gerade abzubilden, brauchen wir kein neues Abbildungsprinzip, sondern es ist nur nötig, alle Punkte der Geraden in derselben Weise durch Grund- und Aufrisse abzubilden, wie es im § 1 beschrieben wurde (Abb. 7). Das Bild einer Geraden in der Grund- sowie einer Aufrißebene ist eine Gerade.

Denken wir uns (Abb. 8) zwei Raumpunkte A und B zunächst im bezifferten Grundriß gegeben, so sehen wir in der Grundrißebene ihre Grundrisse A^* und B^* mit den Höhenzahlen z_a und z_b. Die Verbindungsgerade g^* von A^* und B^* ist dann das Grundrißbild oder kurz der Grundriß der durch A und B gehenden Geraden.

Gewiß kann man sich aus den Höhenzahlen z_a und z_b eine Vorstellung von der Lage der Geraden im Raume machen. Sind gar die Höhenzahlen gleich — liegen die Punkte A und B also gleich hoch —, so sieht man sofort, daß die Gerade parallel zum Grundriß verläuft, daß sie eine sog. *Höhenlinie* ist. Sind A und B aber verschieden hoch, so ist es schon schwieriger, sich etwa die Neigung der Geraden vorzustellen. Eine geneigte Gerade wird ferner die Grundrißebene in einem Punkte, dem sog. *Spurpunkte*, treffen, dessen Kenntnis die Auffassung der Geraden wesentlich erleichtert. Aber es bedarf einer kleinen Rechnung, um die Lage dieses Spurpunktes S zu ermitteln.

Die Einführung von Aufrißebenen wird ein weit deutlicheres Bild von der Lage der Geraden im Raume bieten. Durch die Aufrißachse a_1 führen wir eine Aufrißebene ein und zeichnen in

diese unter Benutzung der Höhenzahlen z_a und z_b die Aufrisse A' und B' der gegebenen Punkte. Der Aufriß g' der Geraden ist dann die Verbindungslinie von A' und B'. Diesem Aufrißbilde der Geraden können wir nun die Höhenlage jedes Geradenpunktes entnehmen. Im besonderen finden wir sofort denjenigen Punkt S der Geraden, der die Höhe Null hat, d. h. den Spurpunkt der Geraden. S' ist sein Aufriß. Mit Q ist der Punkt bezeichnet, in dem die Gerade die Aufrißebene trifft.

Selbstverständlich ist das Aufrißbild der Geraden abhängig von der Lage der Aufrißebene. Wählen wir eine zweite Aufrißebene und legen deren Aufrißachse a_2 senkrecht zum Grundriß g^* der Geraden, so werden wir in dieser Aufrißebene die Aufrisse A'' und B'' der beiden Punkte senkrecht übereinander sehen, und der Aufriß g'' der Geraden steht senkrecht zur Aufrißachse a_2.

Wie müssen wir nun eine Aufrißebene wählen, damit sie uns den Steigungswinkel der Geraden zeigt? Offenbar muß diese Aufrißebene parallel zu der Geraden angenommen werden, denn in dieser Aufrißebene finden wir als Aufriß der Geraden das gleiche Bild, wie wenn wir die Aufrißebene durch die Gerade selbst gelegt hätten. In Abb. 8 ist durch die Aufrißachse a_3, die parallel zum Grundriß g^* der Geraden angenommen wurde, eine solche, zur Geraden parallele Aufrißebene eingeführt. In der Tat haben — wie der Grundriß zeigt — alle Punkte der Geraden den gleichen Abstand von dieser Aufrißebene. A''' und B''' sind die Aufrisse der gegebenen Punkte in dieser *speziellen Aufrißebene* und g''' der Aufriß der Geraden. Der Winkel γ zwischen g''' und der Aufrißachse a_3 ist der *Steigungswinkel der Geraden.*

Bezeichnen wir mit α den Winkel zwischen dem Aufriß einer Geraden und der Aufrißachse in einer *beliebig* gewählten Aufrißebene, etwa unserer ersten, und ferner mit φ den Winkel zwischen dem Grundriß g^* und dieser Aufrißachse, so gilt, wenn γ der Steigungswinkel der Geraden ist, die Beziehung

$$\tan\alpha = \frac{\tan\gamma}{\cos\varphi}$$

zwischen den drei Winkeln.[1])

Beim Aufriß a_2 war der Winkel φ unserer Formel 90^0, und die Formel ergibt dann in der Tat für α einen rechten Winkel. Beim Aufriß a_3 ist der Winkel φ gleich Null.

Man bezeichnet mitunter den Winkel α zwischen dem (beliebigen) Aufriß einer Geraden und der Aufrißachse als *schein-*

1) Wir überlassen es dem Leser, sich diese Formel selbst abzuleiten, da er hierbei prüfen kann, wieweit er bereits imstande ist, die Lage der Punkte und der Geraden im Raume so deutlich aufzufassen, daß er diese Formel einfach abliest.

baren Steigungswinkel der Geraden; eine Bezeichnung, die insofern einen gewissen Vorteil hat, als sie daran erinnert, daß dieser Winkel im allgemeinen keineswegs der wahre Steigungswinkel der Geraden ist.

Bei der Abb. 8 möge man an eine Leiter denken, die gegen eine Wand (die zweite Aufrißebene) gelehnt ist. Will man die Neigung einer Leiter feststellen, so besieht man sich die Leiter, wie es unserem dritten Aufriß entspricht, „von der Seite“. Geht man auf die Leiter in der Richtung senkrecht zur Wand zu, so hat man das Bild, das unser zweiter Aufriß zeigt.

Die Lage einer Geraden im Raum wird anschaulich durch drei Begriffe beschrieben: Den Spurpunkt in der Grundrißebene, den Steigungswinkel und das *Azimut der Geraden.* Damit bezeichnet man den Winkel, den der Grundriß der Geraden mit einer in der Grundrißebene vereinbarten Null-Richtung bildet. Durch Angabe des Spurpunktes ist bekannt, wo die Gerade die Grundrißebene verläßt, durch das Azimut ist sodann ihr Grundriß bestimmt, und der Steigungswinkel legt die Gerade vollends im Raume fest.

Zwei *Sonderfälle der Geraden* bedürfen noch der Erwähnung. Falls die Gerade auf dem Grundriß senkrecht steht (Abb. 9), ist ihr Grundriß g^* ein Punkt, und in jeder Aufrißebene bildet sie sich als auf der Aufrißachse senkrecht stehende Gerade ab. In der Formel ist $\gamma = 90^0$, und bei beliebigem φ ebenfalls $\alpha = 90^0$.

Liegt ferner eine Gerade parallel zur Grundrißebene — ist sie also eine Höhenlinie —, so verlaufen alle Aufrisse parallel zur Aufrißachse (Abb. 10). In solchen Aufrißebenen aber, die senkrecht zu einer Höhenlinie stehen, erscheint diese als Punkt. In der Formel ist bei Höhenlinien $\gamma = 0$ und entsprechend $\alpha = 0$. Nur wenn $\varphi = 90^0$ ist, wird α unbestimmt, da die Formel dann $\tan\alpha = \frac{0}{0}$ ergibt.

Nur eine zu einer Geraden parallele Aufriß- (oder Grundriß-) Ebene gestattet den *Abstand zweier Punkte A* und *B* der Geraden unmittelbar zu messen (Abb. 8). Die Grundrisse A^* und B^* dieser beiden Punkte, sowie die Aufrisse in einer nicht zur Geraden parallelen Aufrißebene haben einen kürzeren Abstand als die Länge des Stücks AB der Geraden. (Es ist $A^*B^* = AB \cdot \cos\gamma$.)

Betrachten wir dagegen *drei* Punkte A, B, C auf der Geraden und bilden das *„Abstandsverhältnis“* $\frac{AC}{BC}$ dieser drei Punkte, so ist diese Zahl gleich dem Abstandsverhältnis der Grundrisse der drei Punkte und auch gleich dem Abstandsverhältnis ihrer Aufrisse in irgendeiner Aufrißebene. Ein Beweis hierfür erübrigt sich wohl, wenn man die Abb. 7 ansieht.

Während wir also dem Grundriß oder einem beliebigen Aufriß einer Geraden sofort entnehmen können, ob z. B. einer ihrer Punkte in der Mitte zwischen zwei anderen liegt, müssen wir einen zur Geraden parallelen Aufriß benutzen, um Abstände von Punkten der Geraden oder den Steigungswinkel zu messen.

§ 3. Darstellung der Ebene.

Bei der Darstellung von Ebenen ist offenbar ein neuer Gedanke nötig. Wollten wir nämlich eine Ebene dadurch darstellen, daß wir ihre sämtlichen Punkte abbilden, so würden diese Bildpunkte die ganze Grundrißebene überdecken und keine Vorstellung der Ebene bringen.

Nun ist die Lage einer Ebene leicht aufzufassen, wenn wir auf ihre *Grundriß-Spurlinie* achten, d. h. auf die Gerade, in der die Ebene die Grundrißebene schneidet, und auf den Steigungswinkel sowie die Richtung des Anstiegs der Ebene. Anschaulicher wird dies noch, wenn wir in der Ebene eine Reihe von Höhenlinien ziehen, die unter sich den gleichen Höhenunterschied haben. Auch die vorher erwähnte Spurlinie ist ja eine solche Höhenlinie in der Höhe null (Abb. 11).

Bilden wir Spur- und Höhenlinien in der Grundrißebene ab, so erhalten wir eine Schar paralleler Geraden, wie es Abb. 12 zeigt. (Von den beiden Sonderfällen, daß die Ebene parallel oder senkrecht zum Grundriß liegt, sehen wir zunächst ab.) Schreiben wir an die Höhenlinien noch ihre Höhenzahlen heran (also Null an die Spurlinie), so haben wir eine *Darstellung der Ebene im bezifferten Grundriß* gewonnen. Natürlich genügen zwei Höhenlinien zur Festlegung der Ebene, es ist aber deutlicher, mehrere Höhenlinien zu zeichnen, da es dann leichter fällt, sich die Ebene zwischen den Höhenlinien ausgespannt zu denken.

Wir bemerken, daß der Abstand der Grundrisse der Höhenlinien — in Abb. 12 mit d bezeichnet — um so kleiner ausfallen wird, je steiler die Ebene geneigt ist; vorausgesetzt, daß diese Höhenlinien immer im gleichen Höhenunterschied gezeichnet wurden. Bezeichnen wir mit η den Steigungswinkel der Ebene und mit h den Höhenunterschied zweier Höhenlinien, so ist $\tan \eta = \frac{h}{d}$.

Wie wird sich nun eine Ebene bei Benutzung von Aufrißebenen darstellen? In Abb. 13 ist zunächst eine Ebene im bezifferten Grundriß durch Spur- und Höhenlinien o, z_1, z_2, z_3 dargestellt. Wir benutzen nun sogleich eine *spezielle Aufrißebene*, die zur Darstellung unserer Ebene besonders geeignet ist, indem wir nämlich diese Aufrißebene so errichten, daß die Höhenlinien auf ihr senkrecht stehen und infolgedessen als Punkte erscheinen (vgl.

Abb. 10). Dazu muß die Aufrißachse a_1 die Spurlinie 0 und die Grundrisse der Höhenlinien senkrecht schneiden. Unsere Ebene wird diese Aufrißebene in einer Geraden e_1, der sog. Aufrißspur, schneiden, und diese Aufrißspur ist nun auch der Aufriß aller Punkte der Ebene. Denn deren projizierende Lote sind den Höhenlinien parallel und verlaufen in der Ebene selbst.[1]) R ist z. B. irgendein Punkt der Ebene.

Unsere spezielle Aufrißebene zeigt die Ebene als Strich e_1, wie man sie sieht, wenn man in der Richtung der Höhenlinien blickt (also senkrecht zu dieser Aufrißebene). Unser Aufriß a_1 zeigt uns ferner den Steigerungswinkel η der Ebene. Es ist der Winkel, den die Aufrißspur e_1 mit der Aufrißachse a_1 bildet. Das Bild in dieser Aufrißebene ist ja so, als ob man den Deckel eines auf dem Tische liegenden Buches etwas aufklappt und in der Richtung des Buchrückens blickt, wobei man den Neigungswinkel des Buchdeckels wahrnimmt.

Wie gestaltet sich aber das Bild, wenn wir eine *beliebige Aufrißebene* benutzen, wie sie in der Abb. 13 durch die Aufrißachse a_2 eingeführt ist? Unsere Ebene wird auch diese neue Aufrißebene in einer Geraden e_2, der zu diesem Aufriß gehörigen Aufrißspur, schneiden. Da die Lage der Ebene im Raum durch den ersten Aufriß festgelegt ist, muß sich diese Aufrißspur e_2 in der zweiten Aufrißebene zeichnen lassen. Auch hier sieht man ihre Lage sofort, wenn man sich die neue Aufrißebene senkrecht über a_2 aufgerichtet denkt, und konstruiert sie so:

Die Grundriß-Spurlinie 0 schneidet die neue Aufrißebene im Punkte P der Aufrißachse a_2. Verfolgen wir nun etwa die oberste Höhenlinie z_3 bis zu ihrem Schnitt mit der neuen Aufrißebene, so liegt dieser Schnittpunkt Q im Raume senkrecht über der Aufrißachse a_2; Q^* ist sein Grundriß. Den Punkt Q selbst (der mit seinem Aufriß zusammenfällt) finden wir in der Höhe z_3 über Q^*. Dieser Punkt Q gehört als Punkt einer Höhenlinie der Ebene an; als Schnittpunkt mit der Aufrißebene gehört er auch dieser an. Er ist folglich ein unserer Ebene und der neuen Aufrißebene gemeinsamer Punkt, so daß durch ihn die gesuchte Aufrißspur e_2 hindurchgehen muß. Durch Q und P ist deren Lage somit bestimmt.

Die anderen Höhenlinien, soweit sie zwischen den beiden Aufrißebenen verlaufen, sind ebenfalls im neuen Aufriß eingezeichnet. Auch ist im neuen Aufriß die Schnittlinie e_1 unserer Ebene mit der ersten Aufrißebene durch e_1'' abgebildet. Von der Ebene ist also das trapezförmige Stück zwischen den beiden Aufrißebenen dargestellt, und wir bitten den Leser, dieses schrägliegende

1) Wer die Aufrißebene senkrecht über a_1 stehen sieht, wird dies als selbstverständlich empfinden.

Trapez im zweiten Aufriß wirklich nach rechts hinten ansteigend zu „sehen".[1])

Mit β ist der Winkel bezeichnet, den die Aufrißspur e_2 im zweiten Aufriß mit dessen Aufrißachse a_2 bildet. Bezeichnen wir noch mit ψ den Winkel zwischen der speziell gewählten Aufrißachse a_1 und der beliebig gewählten a_2, so besteht zwischen den drei Winkeln η, ψ und β die Beziehung

$$\tan\beta = \cos\psi \cdot \tan\eta.$$

Wir können zusammenfassend sagen, daß bei beliebiger Aufrißebene eine Ebene durch Grund- und Aufrißspur ausreichend gekennzeichnet ist. Denn wir können dann ja beliebige Höhenlinien einzeichnen. Ein spezieller Aufriß aber, der auf der Grundrißspur, den Höhenlinien und überhaupt auf der gegebenen Ebene senkrecht steht (a_1), ist besonders geeignet zu ihrer Darstellung, weil er den Steigungswinkel sofort erkennen läßt und weil sich bei ihm alle Punkte der Ebene in der Aufrißspur abbilden. Eine Ebene ist durch einen zu ihr senkrechten Aufriß überhaupt erst als solche gekennzeichnet.

Zwei Sonderfälle sind noch zu erwähnen: Liegt eine Ebene der Grundrißebene parallel, so hat sie keine Grundrißspur, und jeder Aufriß zeigt ihre Aufrißspurlinie als Höhenlinie; jede Aufrißebene leistet hier das gleiche wie eine im allgemeinen Falle speziell zur Ebene senkrecht angenommene. In der obigen Formel ist $\eta = 0$ und somit bei beliebigem ψ ebenfalls $\beta = 0$.

Ferner kann eine Ebene auf der Grundrißebene senkrecht stehen (Abb. 14). In jedem Aufriß finden wir die Aufrißspurlinie senkrecht zur Aufrißachse; ausgenommen bei einer Aufrißebene, die der gegebenen Ebene parallel ist. Es ist $\eta = 90^0$ und die Formel gibt $\beta = 90^0$ für alle ψ mit Ausnahme von $\psi = 90^0$, wo $\tan\beta = 0 \cdot \infty$ herauskommt.[2])

§ 4. Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

Sind mehrere Punkte gegeben, so kann es sich darum handeln, den *Abstand von zwei Punkten* zu ermitteln. Sie sind dazu durch eine Gerade zu verbinden, und ein zu dieser Geraden paralleler Aufriß zeigt den gesuchten Abstand.

Ob ein *Punkt auf einer Geraden* liegt, ist sofort daran zu erkennen, daß dann der Grundriß des Punktes auf dem Grundriß der Geraden und die Aufrisse des Punktes auf den Aufrissen der Geraden liegen müssen.

1) Überhaupt ist die Auffassung der Abbildung 13 sehr lehrreich. Wie wird R'' gefunden?

2) Es ist amüsant, wie die Ausnahmefälle der Formeln durch die besonderen Lagen der Aufrißebenen verständlich werden.

Sind *zwei Gerade* gegeben, so sind drei Fälle möglich. Die Geraden können parallel sein. Dann laufen auch ihre Grund- und Aufrisse parallel. Oder die Geraden schneiden sich in einem Punkte (Abb. 15). Grund- und Aufrisse müssen dann so liegen, daß die Verbindungsgerade ihrer Schnittpunkte P^* und P' die Aufrißachse senkrecht schneidet. Diese Schnittpunkte sind dann Grund- und Aufriß des Punktes P, in dem die Geraden sich im Raum treffen. Laufen endlich die Geraden windschief aneinander vorbei, so wird sich ein Bild darbieten, wie es die Abb. 16 zeigt. Hier läuft, wie der Aufriß zeigt, im Raume die Gerade g_2 über der Geraden g_1 weg.

Ist *eine Ebene und eine Gerade* gegeben, so sind wieder drei Fälle möglich. Die Gerade kann in der Ebene liegen, sie kann parallel der Ebene verlaufen und sie kann die Ebene in einem Punkte durchstoßen. Liegt die Gerade in der Ebene und benutzen wir einen speziellen, zur Ebene senkrechten Aufriß a_1 (Abb. 17), so muß der Aufriß g' der Geraden mit der Aufrißspur e_1 zusammenfallen, denn alle Punkte der Ebene, also auch die Punkte der auf ihr liegenden Geraden, haben in e_1 liegende Aufrisse.

Wird ein beliebiger Aufriß a_2 benutzt, und ist die Ebene durch ihre Grundrißspur 0 sowie die Aufrißspur e_2 gekennzeichnet, ferner die Gerade durch ihren Grundriß g^* und ihren Aufriß g'', so muß, wenn die Gerade auf der Ebene liegt, der Spurpunkt S der Geraden auf der Grundrißspur 0 der Ebene liegen, und es genügt festzustellen, ob noch ein weiterer Punkt der Geraden in der Ebene liegt. Wir wählen den Punkt R der Geraden, in dem sie die Aufrißebene trifft. Dieser Punkt muß auf der Aufrißspur e_2 der Ebene liegen (sein Grundriß R^* muß in der Aufrißachse a_2 liegen). Also ist auch bei beliebig gewähltem Aufriß die Entscheidung, ob eine Gerade auf der Ebene liegt, einfach zu treffen.

Die Frage, ob ein *Punkt auf einer Ebene* liegt, läßt sich ebenfalls am schnellsten beantworten, wenn ein spezieller Aufriß, der zur Ebene senkrecht steht, benutzt wird, wie es Abb. 18 zeigt. Der Aufriß des Punktes muß dann auf der Aufrißspur e_1 der Ebene liegen. Ist dagegen die Ebene bei beliebigem Aufriß durch ihre Spuren o und e_2 gegeben, wie es Abb. 19 zeigt, so kann man es dem Grund- und Aufriß eines Punktes P nicht ohne weiteres ansehen, ob er auf der Ebene liegt. Man nimmt dann zweckmäßig eine durch den Punkt und zur Grundrißspur der Ebene parallel laufende Höhenlinie h zur Hilfe. Liegt der Punkt auf der Ebene, so wird auch diese Höhenlinie in der Ebene verlaufen, was man daran erkennt, daß der Eintrittspunkt Q der Höhenlinie in die Aufrißebene auf der Aufrißspur der Ebene liegt.

Will man den *Abstand eines nicht auf einer Ebene liegenden Punktes* von dieser ermitteln, so benutzt man am besten einen zur Ebene senkrechten Aufriß, in dem man den Abstand des Punktes von der Ebene unmittelbar sieht und messen kann. Liegt eine Gerade im Raume parallel zu einer Ebene, so wird ebenfalls ein spezieller, zur Ebene senkrechter Aufriß dies sofort erkennen lassen, da dann der Aufriß der Geraden parallel zur Aufrißspur sein muß. Gerade zur Darstellung und Kennzeichnung dieses Sonderfalles wird ein zur Ebene senkrechter Aufriß mit großem Vorteil benutzt.

Schneidet eine Gerade eine Ebene, so wird die gegenseitige Lage besonders deutlich werden, wenn man den *Durchstoßpunkt* der Geraden durch die Ebene ermittelt und einzeichnet. In Abb. 20 ist eine Ebene durch drei Punkte A, B, C gekennzeichnet, die mit Hilfe einer beliebigen Aufrißebene a_1 dargestellt wurden. Ferner ist eine Gerade g durch ihren Spurpunkt S und noch einen Punkt D gegeben. Zu ermitteln ist der Durchstoßpunkt R der Geraden durch die Ebene.

Wir führen dazu eine neue Aufrißebene so ein, daß sie auf der gegebenen Ebene senkrecht steht. Dazu ist nötig, die Aufrißachse a_2 so zu wählen, daß sie auf dem Grundriß einer Höhenlinie der Ebene senkrecht steht. Eine solche Höhenlinie h ist leicht eingezeichnet, wenn wir im ersten Aufriß durch den Punkt A' eine Parallele zur Aufrißachse ziehen. Soll diese Parallele in der Ebene verlaufen, so muß sie die Dreiecksseite BC schneiden. Diesen Schnittpunkt loten wir auf deren Grundriß B^*C^* herunter, verbinden den so erhaltenen Punkt mit A^* und haben damit den Grundriß h^* der Höhenlinie gefunden. Hierzu senkrecht muß die neue Aufrißachse a_2 liegen. Nun zeichnen wir die neuen Aufriße A'', B'', C'' der gegebenen Punkte. Sie liegen in éiner Geraden, nämlich der Aufrißspur der Ebene in der neuen Aufrißebene, denn in dieser erscheint die Ebene ja als Strich. Zeichnen wir noch den neuen Aufriß g'' der Geraden SD, so brauchen wir nur zuzusehen, wo dieser neue Aufriß der Geraden das Bild $A''B''C''$ der Ebene trifft. Es geschieht im Punkte R''. Dies ist der Aufriß des gesuchten Durchstoßpunktes, denn es ist sicher ein Punkt der Ebene, da ja alle Punkte der Ebene sich bei diesem Aufriß in der Geraden $A''B''C''$ abbilden. Es ist jetzt nur noch nötig, den Grundriß R^* und den Aufriß R' des gefundenen Durchstoßpunktes einzuzeichnen.

Das Bild von dem dreieckigen Stück der Ebene und der durchstoßenden Geraden wird deutlicher, wenn wir im Grund- und Aufriß das Stück der Geraden nicht ausziehen, das vom Dreieck verdeckt wird. Falls nicht sofort anschaulich ist, welche Teile der Geraden sichtbar und welche unsichtbar sind, so hat man, um dies etwa für den Grundriß zu entscheiden, z. B. auf die

Kreuzungsstelle von A^* B^* und g^* zu achten und dann durch Betrachten des Aufrißbildes zu entscheiden, ob hier g oder $A\,B$ im Raume höher liegt.[1])

Die Frage, ob man im Grund- und Aufriß die gleiche oder verschiedene Flächen des Dreiecks sieht (die etwa durch Farben unterschieden sind), kann, wenn die Anschauung versagt, dadurch entschieden werden, daß man sich im Punkte R auf das Dreieck eine Taschenuhr so gelegt denkt, daß man im Grundriß auf ihr Zifferblatt blickt. Ihre Zeiger weisen dann nacheinander auf die Punkte A, B und C. Der Aufriß zeigt uns die Zeiger umgekehrt umlaufend (links herum), folglich blicken wir im Aufriß gegen den Deckel der Uhr und somit auf die andere Fläche des Dreiecks wie im Grundriß.

Die Aufgabe, den *Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene* zu ermitteln, kommt häufig vor, und es wäre oft schwerfällig, jedesmal einen zu der betreffenden Ebene senkrechten Aufriß einzuführen. Man kommt mitunter dadurch eher zum Ziel, daß man durch die Gerade eine *Hilfsebene legt.*

In Abb. 21 ist e die gegebene Ebene, g die Gerade und R der gesuchte Durchstoßpunkt. Wird durch die Gerade g irgendeine Hilfsebene f gelegt, so schneidet diese Hilfsebene die gegebene Ebene e in einer Schnittlinie s, und der gesuchte Durchstoßpunkt R ist der Schnitt von g und s. Diese Konstruktion liefert den Durchstoßpunkt vielfach deshalb schneller, weil die Hilfsebene f ganz beliebig angenommen und daher so gewählt werden kann, daß die Konstruktion besonders einfach wird.

Ein *Beispiel* möge dies zeigen.

In Abb. 22 sind zwei durch Parallelogramme begrenzte Ebenenstücke I und II durch ihre Umrandung dargestellt. Man sieht sofort, daß das Blatt I das Blatt II in einem Schlitz durchsetzen muß. Um dessen genaue Lage zu finden, kommt es darauf an, die Durchstoßpunkte A und B der Geraden 1 und 3 durch das Blatt II aufzusuchen.

Wir legen durch die Gerade 1 eine senkrechte Hilfsebene. Diese schneidet das Blatt II in einer Geraden s. Im Grundriß sieht man den Grundriß s^* dieser Schnittgeraden s mit dem Grundriß von 1 zusammenfallen, da s und 1 in ein und derselben senkrechten Ebene, nämlich unserer Hilfsebene, liegen. Deren Grundrißspur fällt ebenfalls mit s^* zusammen. Die Schnittgerade s schneidet

---

1) Gerade diese Aufgabe ist ein Beispiel dafür, wie jemand, der bereits eine gewisse Raumvorstellung und etwas von der Kunst, Zeichnungen zu lesen, gewonnen hat, ohne Zweifel und nur aus der Anschauung heraus sehen wird, wie die Gerade zu dem Dreieck liegt; wie aber auch andererseits jemand, dem diese Anschauungsfähigkeit noch mangelt, sich schrittweise durch logische Schlüsse Gewißheit über die Lage von Gerade und Dreieck verschaffen kann.

die Seiten 2 und 4 des Blattes II in Schnittpunkten, die in den Aufriß übertragen werden. Diese Schnittpunkte sind nicht durch Buchstaben bezeichnet, sondern nur die Grund- und Aufriß verbindenden Linien durch kurze Striche angedeutet. Den Aufriß dieser Schnittpunkte verbindet der Aufriß s' der Schnittgeraden; der Schnittpunkt von s' mit dem Aufriß von 1 ist der Aufriß A' des gesuchten Durchstoßpunktes A. Zur Ermittlung des Durchstoßpunktes B, in dem 3 durch II hindurchtritt, wurde eine Hilfsebene durch 3, diesmal senkrecht zur Aufrißebene, benutzt. Sie schneidet II in der Schnittgeraden t, deren Aufriß t' vor dem Aufriß von 3 liegt. Die Schnittpunkte von t' mit 2 und 4 im Aufriß werden in den Grundriß „heruntergeholt“ und der Grundriß t^* eingezeichnet. Er schneidet den Grundriß von 3 im Punkte B^*, und nach der Einzeichnung von dessen Aufriß ist die Aufgabe gelöst. Der Leser möge zum Vergleich die gleiche Aufgabe auch so behandeln, daß er eine zu II senkrechte neue Aufrißebene einführt. Die Methode der Hilfsebenen führt in diesem Falle offenbar erheblich schneller zum Ziele.

Abb. 23 zeigt die Ermittlung der *Schnittgeraden zweier Ebenen*. Die beiden Ebenen sind gegeben durch ihre Spurlinien 0 und ihre Steigungswinkel η_1 und η_2. Um diese Ebenen darzustellen, benutzen wir zwei Aufrisse, die auf je einer Ebene senkrecht stehen. a_1 und a_2 sind die Aufrißachsen, e_1 und e_2 die Aufrißspuren, η_1 und η_2 die gegebenen Steigungswinkel. In beiden Ebenen zeichnen wir je eine Höhenlinie in gleicher Höhe h. In den beiden Aufrissen erscheinen diese Höhenlinien als Punkte, und ihre Grundrisse sind strichpunktiert eingezeichnet. Deren Schnittpunkt S^* ist der Grundriß eines beiden Ebenen gemeinsamen Punktes. Da der Schnitt N der beiden Grundrißspurlinien ebenfalls ein beiden Ebenen gemeinsamer Punkt ist, muß die Verbindungslinie NS^* der Grundriß s^* der gesuchten Schnittlinie der beiden Ebenen sein. Die Aufrisse dieser Schnittlinie fallen mit e_1 und e_2 zusammen.

Will man etwa noch den Steigungswinkel γ der Schnittlinie ermitteln, so führt man eine dritte Aufrißebene parallel zur Schnittlinie (d. h. a_3 parallel zu s^*) ein, zeichnet einen dritten Aufriß von N und S und hat damit den dritten Aufriß s''' der Schnittgeraden und ihren Steigungswinkel γ gefunden.

§ 5. Umklappung einer Ebene.

Wie sieht das in Abb. 20 dargestellte Dreieck A, B, C eigentlich aus? Sind alle Winkel spitz, oder ist vielleicht der Winkel bei B stumpf, wie man nach dem Aufriß vermuten könnte? Solch eine Frage nach der *Form einer ebenen Figur* ist häufig zu beantworten. Die Ermittlung des Winkels zwischen zwei

Geraden führt bereits auf diese Fragestellung. Die Betrachtung von Grund- und Aufriß reicht hierzu nicht aus. Wir finden hier zwar das Abstandsverhältnis von drei Punkten, die auf éiner Geraden liegen. Über das Verhältnis von Längen verschiedener Geraden oder über die Größe von Winkeln können wir dagegen nichts Genaues aussagen. In Abb. 20 ist z. B. das Abstandsverhältnis der drei Punkte D, R, S der Geraden g in allen Bildern das gleiche; also

$$\frac{D''R''}{R''S''} = \frac{D'R'}{R'S'} = \frac{D^*R^*}{R^*S} = \frac{DR}{RS}.$$

Aber wie sich die Längen der Dreiecksseiten zueinander verhalten und über die Größe der Dreieckswinkel können wir ohne weiteres nichts zahlenmäßig Bestimmtes angeben.

Um nun Figuren, die in einer Ebene liegen, ausmessen zu können, müssen wir ein *neues Prinzip* zu Hilfe nehmen: Wir klappen die Ebene, in der wir etwas messen wollen, um eine Höhenlinie soweit herum, daß sie waagerecht zu liegen kommt. Dann zeigt die Grundrißprojektion der waagerecht liegenden Ebene die wahre Gestalt der in ihr liegenden Figuren und gestattet deren Ausmessung.

In Abb. 24 sind A, B, C drei Punkte, die eine Ebene e bestimmen. A^*, B^*, C^* ist der Grundriß der Punkte und die Aufrißebene ist speziell senkrecht zur Ebene e angenommen. Die Aufrisse A', B', C' der Punkte liegen also auf einer Geraden e, dem Aufrißbilde der Ebene. Eine Höhenlinie h unserer Ebene erscheint in diesem Aufriß als Punkt h' (h^* ist ihr Grundriß). Wir denken uns durch die Höhenlinie noch eine waagerechte Ebene w gelegt und benutzen diese jetzt als Grundrißebene. Den Steigungswinkel α der Ebene e läßt der Aufriß unmittelbar erkennen. Nun drehen wir die Ebene e um die Höhenlinie h, die wir als „*Klappachse*" bezeichnen wollen, soweit nach links herum, bis sie in die waagerechte Lage kommt und mit w zusammenfällt. Diese *Umklappung* läßt sich in unserem speziellen Aufriß gut verfolgen. Die Punkte der Ebene beschreiben bei dieser Drehung Kreise um die Klappachse, wie sie für A und C gestrichelt eingezeichnet sind. Die dunklen Punkte $A_0 B_0 C_0$ bezeichnen im Grund- und Aufriß die Lage nach der Umklappung. Der strichpunktierte Kreis z. B., den der Punkt B bei der Umklappung beschreibt, erscheint von oben gesehen als eine gerade Linie, welche die Klappachse senkrecht schneidet. Der Abstand y des umgeklappten Punktes B_0 von der Klappachse ist der Radius dieses Kreises und gleich dem wirklichen Abstand des Punktes B von der Klappachse. Der Abstand η des Grundrisses B^* von der Klappachse ist kleiner. Er ist gleich dem mit $\cos\alpha$ multiplizierten Abstande y des Punktes B von der Klappachse; d. h. $\eta = y \cdot \cos\alpha$.

Wir merken uns: Die Verbindungslinie von Grundriß und Umklappung eines Punktes schneidet die Klappachse senkrecht. Die Abstände des Grundrisses und der Umklappung eines Punktes von der Klappachse verhalten sich wie $\cos\alpha : 1$.

Dies Verhältnis hängt nur vom Steigungswinkel α der Ebene ab und ist demnach für alle Punkte der Ebene das gleiche. Ferner bemerken wir: Grundriß und Umklappung einer in der Ebene e liegenden Geraden (z. B. der Geraden g, die A und B verbindet) schneiden sich auf der Klappachse. Der Schnittpunkt einer Geraden mit der Klappachse bleibt ja bei der Umklappung an seiner Stelle. Es genügt also, wenn man mit Hilfe des speziellen Aufrisses die Umklappung nur éines Punktes, etwa des Punktes B konstruiert. Die Lage aller anderen Punkte der Ebene nach der Umklappung kann man dann im Grundriß allein finden. Hat man etwa B_0 konstruiert und sucht nun die Umklappung A_0 des als A^* im Grundriß gegebenen Ebenenpunktes A, so zieht man im Grundriß die Gerade g^*. Deren Umklappung g^0 geht von B_0 aus und trifft sich mit g^* auf der Klappachse. Das von A^* auf die Klappachse gefällte und verlängerte Lot schneidet dann auf g^0 den gesuchten Punkt A_0 aus.

Liegt in der Ebene e eine Gerade p *parallel* zur Klappachse (ist also eine Höhenlinie), so ist ihr Grundriß p^* sowie ihre Umklappung p^0 zur Klappachse parallel. Und bei einer zur Klappachse *senkrechten* Geraden s fallen Grundriß s^* und Umklappung s^0, senkrecht zur Klappachse stehend, zusammen. Der von zwei solchen Geraden s und p gebildete rechte Winkel erscheint also auch im Grundriß als Rechter. In allen anderen Fällen ist der im Grundriß erscheinende Winkel zweier Geraden von dem wahren Winkel, den sie im Raume bilden und den die Umklappung der durch die Geraden gehenden Ebene zeigt, verschieden.

Wir drücken dies noch so aus: Ein im Raume liegender rechter Winkel bildet sich im Grundriß nur dann als Rechter ab, wenn ein Schenkel der Grundrißebene parallel liegt.

Natürlich gilt entsprechendes auch für ein beliebiges Aufrißbild eines rechten Winkels. Nur dann erscheint ein solcher im Aufriß als Rechter, wenn ein Schenkel der betreffenden Aufrißebene parallel verläuft. Fassen wir Grund- und Aufrißebene in der Bezeichnung Bildebene zusammen, so können wir allgemein sagen, daß *bei senkrechter Parallelprojektion ein rechter Winkel nur dann als Rechter abgebildet wird, wenn ein Schenkel der Bildebene parallel ist.*

Dem Leser überlassen wir den Beweis folgenden Satzes: Liegt in einer Ebene, die mit der Bildebene den Winkel α bildet, eine geschlossene Figur, deren *Flächeninhalt* F ist, so ist der Flächeninhalt F' des Bildes $F' = F \cdot \cos\alpha$.

§ 6. Lot auf einer Ebene.

Welches Bild wird der häufig vorkommende Sonderfall darbieten, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht? Die Antwort ist: Der Grundriß der Geraden steht senkrecht auf der Grundrißspur der Ebene und ihr Aufriß senkrecht auf der Aufrißspur der Ebene in dem betreffenden Aufriß.[1])

Wir schließen so: Steht eine Gerade auf der Ebene senkrecht, so steht sie senkrecht auf allen in der Ebene verlaufenden Geraden; also auch auf derjenigen Höhenlinie der Ebene, die durch den Punkt der Ebene geht, in dem das Lot aufsetzt. Von dem rechten Winkel, den unser Lot mit dieser Höhenlinie bildet, ist nun ein Schenkel, nämlich die Höhenlinie, dem Grundriß parallel. Also bildet er sich (nach § 5) im Grundriß als rechter Winkel ab. *Der Grundriß des Lotes steht also senkrecht auf dem Grundriß der Höhenlinie.* Dieser ist aber der Grundrißspur der Ebene parallel, also bildet auch diese mit dem Grundriß des auf der Ebene stehenden Lotes einen rechten Winkel. Für den Aufriß gilt wörtlich der gleiche Beweis, nur muß man statt einer Höhenlinie eine zur Aufrißebene parallele Gerade der Ebene — eine sog. Frontlinie — nehmen.

§ 7. Winkel zwischen zwei Ebenen.

Noch eine Fragestellung, deren praktische Bedeutung einleuchtet, wollen wir erledigen. Wie mißt man den Winkel, den zwei Ebenen miteinander bilden? Stehen die Ebenen auf der Grundrißebene senkrecht, so ist die Sache ja einfach. Man sieht den Winkel unmittelbar und braucht nur an ein aufgeklapptes Buch zu denken, das man aufrecht auf den Tisch stellt und sich von oben (in der Richtung des Buchrückens) ansieht. Diese Vorstellung wollen wir für beliebig im Raume liegende Ebenen allgemein so fassen: Der Winkel zweier Ebenen erscheint in einer Hilfsebene (wir wollen sie „*Meßebene*“ nennen), die senkrecht auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen, also auch senkrecht auf diesen selbst steht. Der gesuchte Winkel wird gebildet von den beiden Schnittlinien der Meßebene mit den gegebenen Ebenen. Um also den Winkel zwischen irgendwie im Raume liegenden Ebenen zu messen, müssen wir eine Meßebene einführen, die auf der Schnittgeraden dieser Ebenen senkrecht steht (sonst aber beliebig gewählt werden kann), ihre Schnittlinien mit diesen Ebenen aufsuchen und deren Winkel messen. Dazu wird es nötig sein, die Meßebene um eine ihrer Höhenlinien (zu denen auch ihre Grundrißspur gehört) in die waagerechte Lage umzuklappen.

---

1) Ob dem Leser dies aus der Anschauung einer Ebene und des darauf senkrecht stehenden Lotes selbstverständlich erscheint?

In Abb. 25 sind von zwei Ebenen ihre mit 0 0 bezeichneten Grundrißspurlinien gegeben. Ferner eine Gerade g, die durch den Schnittpunkt N der Ebenenspuren und durch einen Punkt P geht, von dem der Grundriß P^* und die Höhe z_p gegeben sei. Beide Ebenen sollen durch die Gerade g hindurchgehen, die also die Schnittgerade beider Ebenen wird. Die Lage der Ebenen ist jetzt völlig bestimmt. Um ihren Schnittwinkel zu bestimmen, führen wir eine Meßebene m ein, die auf g senkrecht stehen muß, im übrigen aber beliebig ist. Nach § 6 muß ihre Grundrißspur m_0 senkrecht zu g^* sein; sie ist strichpunktiert eingezeichnet und schneidet die Ebenenspuren in den Punkten A und B. Nun führen wir eine Aufrißebene parallel zu g ein, indem wir die Aufrißachse a parallel zu g^* annehmen. In diese Aufrißebene zeichnen wir zunächst die Aufrisse von P und N ein, da deren Höhen gegeben sind. Durch ihre Verbindung erhalten wir den Aufriß g' der Schnittgeraden g. Die Aufrißspur m_1 der Meßebene muß senkrecht zu g' stehen, während die Grundrißspur m_0 der Meßebene in unserem Aufriß als Punkt erscheint. D ist der Durchstoßpunkt der Schnittgeraden g durch die Meßebene m. Den Grundriß dieses Durchstoßpunktes haben wir nicht eingezeichnet, weil wir ihn nicht brauchen.

Die Meßebene schneidet nun die gegebenen Ebenen in Geraden s_1 und s_2, deren Aufrisse mit m_1 zusammenfallen und deren Grundrisse nicht eingezeichnet sind. Diese Schnittgeraden treffen die Grundrißebene in den Punkten A und B. (Warum?) Nun klappen wir die Meßebene um ihre Grundrißspur m_0 in die Grundrißebene hinein, wie es der Pfeil im Aufriß anzeigt. Die Umklappung D^0 des Durchstoßpunktes D muß auf g^* zu liegen kommen und der Aufriß gibt den Abstand von m_0. Verbinden wir nun D^0 mit A und B (strichpunktiert), so sind diese Verbindungslinien $s^0{}_1$ und $s^0{}_2$ die Umklappungen der Schnittgeraden von Meßebene und den gegebenen Ebenen. Der Winkel zwischen ihnen ist der gesuchte Winkel zwischen den beiden Ebenen.

§ 8. Einführung einer neuen Bildebene.

Von der Einführung einer neuen Aufrißebene haben wir mehrfach Gebrauch gemacht. Mitunter ist es zweckmäßig, diesen Gedanken noch dahin zu erweitern, daß wir als „neue Bildebene“ eine auf der Aufrißebene senkrecht stehende Ebene zu Hilfe nehmen. In Abb. 26 bezeichnet G eine Grundrißebene und A eine Aufrißebene. Ein Raumpunkt P ist darauf in bekannter Weise abgebildet. P^* und P' sind Grund- und Aufriß von ihm.

Nun führen wir eine Bildebene B ein, die in der Geraden b auf der Aufrißebene senkrecht steht, projizieren den Raumpunkt P durch ein Lot auf sie und erhalten den Bildpunkt $\bar{P}$ auf B.

Jetzt denken wir uns zuerst die neue Bildebene B um b in die Aufrißebene hineingeklappt, und sodann die Aufrißebene mit der darin liegenden Ebene B in die Grundrißebene um die Aufrißachse a hineingeklappt. Oder: — was mitunter anschaulicher ist — wir fassen diesmal unsere Zeichenebene als Aufrißebene auf und klappen die Grundrißebene G um a nach unten und die neue Bildebene B um b nach links (allgemein vom Gegenstand weg) in die Zeichenebene hinein. Es entsteht ein Bild, wie es die Abb. 27 zeigt. P^* und P' sind Grund- und Aufriß eines Raumpunktes. b bedeutet die Einführung einer auf der Aufrißebene senkrecht stehenden neuen Bildebene und $\overline{P}$ ist der Bildpunkt von P in dieser. Die Verbindungslinie von $\overline{P}$ und P' muß senkrecht auf b stehen und der Abstand d des Bildpunktes $\overline{P}$ von b ist ebenso groß wie der Abstand des Grundrisses P^* von a, nämlich gleich dem Abstand des Punktes P von der Aufrißebene. Die Begründung davon können wir jetzt wohl dem Leser überlassen.[1])

§ 9. Übungsbeispiele.[2])

1. In einem rechtwinkligen xyz-Koordinatensystem sind die Koordinaten von fünf Punkten A, B, C, D und P gegeben, wie es die nebenstehende Tabelle zeigt.

	x	y	z	
A	65	55	82	g
B	53	131	0	
C	55	62	33	h
D	88	88	33	
P	102	58	10	

Durch die Punkte AB geht eine Gerade g, und durch CD eine Gerade h. Nun soll vom Punkte P aus eine Gerade s gezogen werden, die sowohl g wie h schneidet. Sind Q und R die Schnittpunkte von s mit g und h, so sollen noch die Längen der Abschnitte PQ und PR auf der Geraden s gemessen werden (Abb. 28).

Wir nehmen die xy-Ebene zur Grundrißebene und tragen die Grundrisse ($A^* \ldots P^*$) der fünf gegebenen Punkte ent-

1) Rein geometrisch ist diese Einführung einer auf der Aufrißebene senkrechten Bildebene genau dasselbe, wie die Einführung einer neuen Aufrißebene. Da wir aber durch den Begriff der Grundrißebene an eine bestimmte Orientierung im Raume gebunden sind, mußte dies besonders erwähnt werden. Der reine Mathematiker würde nur von Bildebenen sprechen, die irgendwie im Raume liegen können. Es erleichtert aber fraglos das „Einfühlen" in die Abbildungen, wenn — ganz unmathematisch — die fühlbare Richtung der Erdschwere betont wird.

2) Die Beschreibung der Lösung ist bei den folgenden Aufgaben ziemlich kurz gehalten, um den Leser zu nötigen, selbst nachzudenken. Ich empfehle dringend, die Aufgabe durch eigene Zeichnung zu behandeln oder wenigstens die beim Druck fortgelassenen Hilfslinien in die Abbildungen einzuzeichnen.

sprechend ihren x- und y-Koordinaten ein. — Die Punkte C und D liegen gleich hoch ($z_C = z_D = 33$); ihre Verbindungslinie h ist also eine Höhenlinie.

Senkrecht zu dieser stellen wir eine erste Aufrißebene ($a_1 \perp h^*$) und zeichnen die Aufrisse von Punkten und Geraden unter Benutzung der z-Koordinaten ein. Die Höhenlinie h erscheint in diesem Aufriß als Punkt, und der Aufriß irgendeiner Geraden, die im Raume diese Höhenlinie h schneidet, muß durch diesen Punkt gehen.

Der (strichpunktierte) Aufriß s' unserer gesuchten Geraden muß also von P' ausgehen und jenen Punkt treffen. Der Schnitt von s' und g' ist der Aufriß Q' des ersten der gesuchten Schnittpunkte, während der Aufriß R' des anderen mit dem Aufriß h' der Höhenlinie zusammenfällt.

Wird jetzt der Grundriß Q^* von Q durch das Lot $Q'Q^* \perp a_1$ eingezeichnet, so kann auch der Grundriß $s^* = P^*Q^*$ eingetragen werden, wodurch auch R^* gefunden ist, und die Koordinaten der neuen Punkte Q und R können gemessen werden.

Um noch die Abstände PQ und PR zu messen, führen wir eine zweite Aufrißebene parallel zur Geraden s ein ($a_2 \parallel s^*$) und zeichnen darin die Aufrisse P'', Q'', R'' und s''.

Die Strecken $P''Q''$ und $P''R''$ sind die gesuchten Abstände.[1])

2. In Abb. 29 soll die Zeichenebene ein Stück einer Landkarte bedeuten. In den Punkten A, B, C sind Bohrlöcher niedergebracht, um die *Lage und Mächtigkeit eines Kohlenflözes* zu ermitteln. Man setzt dabei voraus, daß dieses Flöz von zwei zueinander parallelen Ebenen begrenzt wird, deren Abstand man als Mächtigkeit des Flözes bezeichnet. Die Bohrlöcher A und B sind nur bis zur oberen, das Flöz begrenzenden Ebene (dem sog. „Hangenden") niedergebracht, während das Bohrloch C das Flöz bis zur unteren Begrenzung (dem sog. „Liegenden") durchfahren hat. Die „Teufen" dieser Bohrlöcher sind bekannt.

Zur anschaulichen Darstellung dieser Bohrungen führen wir zunächst willkürlich eine Aufrißebene durch die Aufrißachse a_1 ein. Zu dieser parallel sehen wir die drei Bohrlöcher, wobei deren Teufen maßstäblich eingetragen wurden. Beim Bohrloch C ist durch einen kleinen Strich der Eintritt ins Hangende gekennzeichnet.

Um nun zunächst die Lage der oberen Ebene (des Hangenden) festzulegen, denken wir uns die unteren Enden der Bohrlöcher A

---

1) Wollte man diese Aufgabe nach den Regeln der analytischen Geometrie rechnerisch behandeln, so würde man zweckmäßig eine Koordinatentransformation ausführen, damit die Höhenlinie h auf einer Koordinatenebene senkrecht zu stehen kommt; d. h. man würde also statt der xy-Achsen bei festbleibender z-Achse neue $\xi\eta$-Achsen so einführen, daß die ξ- oder η-Achse unserer Aufrißebene a_1 parallel wird.

und B durch eine Gerade g verbunden, deren Grund- und Aufriß eingezeichnet wurde. Dem Aufriß entnimmt man nun denjenigen Punkt G der Geraden, in dem sie die Oberfläche trifft. Eine zweite Gerade h ist durch den tiefsten Punkt des Bohrloches A und denjenigen Punkt des Bohrloches C gelegt, in dem das Hangende getroffen wurde. Im Punkte H trifft diese Gerade h die Erdoberfläche. Die Verbindungsgerade s von G und H ist die Schnittlinie (der sog. „Ausbiß") der oberen Begrenzungsebene des Flözes mit der Erdoberfläche.

Um nun die Neigung („das Einfallen") und die Mächtigkeit des Flözes festzustellen, führen wir einen zweiten Aufriß senkrecht zu den Begrenzungsebenen ein. Da wir in s eine Höhenlinie der oberen Begrenzungsebene gefunden haben, muß die Aufrißachse a_2 dieser neuen Aufrißebene senkrecht zu s^* gezogen werden. Wieder zeichnen wir in diesem neuen Aufriß die Bohrlöcher ein und sehen in diesem Aufriß das Hangende als Strich, der durch die unteren Enden der Bohrlöcher A und B zu ziehen ist. Der Winkel α mit der Erdoberfläche e in diesem Aufriß ist der Neigungswinkel des Flözes. Die untere Begrenzungsebene muß sich in diesem Aufriß nach unserer Annahme parallel zu der oberen abbilden, und zwar muß diese Parallele durch den tiefsten Punkt des Bohrloches C hindurchführen. Die Mächtigkeit m des Flözes kann in diesem Aufriß (zwischen den Pfeilspitzen) abgemessen werden.

3. Senkrecht auf der Grundrißebene steht ein Prisma von quadratischem Querschnitt. Dieses soll eine Öffnung erhalten, in die ein anderes geneigt liegendes Prisma von dreieckigem Querschnitt gerade hineinpaßt.

Wir nehmen (Abb. 30) eine Aufrißebene parallel den Kanten 1, 2, 3 dieses zweiten Prismas. Um dessen Querschnitt darzustellen, führen wir (nach § 8) eine neue Bildebene ein, die senkrecht zur Aufrißebene und den Kanten dieses Prismas steht. Oben rechts zeigt diese in die Aufrißebene hineingeklappte Bildebene den dreieckigen Querschnitt des Prismas. Da das Bild der Dreiecksseite 1 2 in dieser Bildebene auf den Aufrissen 1′, 2′, 3′ der Prismenkanten 1, 2, 3 senkrecht steht, sind die Kanten 1 und 2 gleichweit von der Aufrißebene entfernt, so daß ihre Grundrisse 1* und 2* zusammenfallen. Die Durchstoßpunkte der Kanten 1, 2, 3 durch die senkrechten Ebenen des quadratischen Prismas läßt der Grundriß sofort erkennen. Ihre Aufrisse liegen auf den Aufrissen 1′, 2′, 3′ der Prismenkanten.

Nun werden die Kanten II und IV des quadratischen Prismas noch Durchstoßpunkte in den die Prismenflächen 1 3 und 2 3 des schrägen Prismas haben, die nicht sofort erkennbar sind. Die Prismenfläche 1 3 wird die Fläche III IV in einer Geraden s schneiden, von der éin Punkt, nämlich der Austrittspunkt D

der Kante 3 aus der Fläche III IV, bereits bekannt ist. Denken wir uns nun die Prismenfläche III IV (etwa durch ein angelegtes Blatt Papier) erweitert, so können wir den Durchstoßpunkt A der Kante 1 in der (erweiterten) Prismenfläche III IV im Grundriß erkennen und seinen Aufriß A' auf $1'$ einzeichnen. Damit ist der Aufriß s' der Schnittgeraden s zwischen der Fläche 1 3 und III IV gefunden und weiterhin auch der Eintrittspunkt E der Kante IV in die Fläche 1 3. Ebenso werden die übrigen Durchstoßpunkte der Kanten II und IV durch die Flächen 1 3 und 2 3 gefunden.[1])

Sind alle zehn wechselseitigen Durchstoßpunkte ermittelt, so kommt die Hauptsache: Die Konturen des Lochs im senkrechten Prisma zu „sehen" und den Aufriß durch Verbinden der Durchstoßpunkte fertig zu machen. Die Konturen des Lochs sind, soweit sie unsichtbar bleiben, gestrichelt eingezeichnet, was vielfach die Deutlichkeit des Bildes erhöht, indem es einen massiven Körper „durchsichtig" macht. Man beachte, wie von der Rückwand des Loches, an die sich beim Hineinschieben des schrägen Prismas die Fläche 1 2 anlegen würde, zwei kleine dreieckige Stücke im Aufriß sichtbar sind.

Auf eine ähnliche Durchdringung zweier Prismen führt die folgende technische Aufgabe.

4. Auf der Grundrißebene liegt ein Prisma. Senkrecht zu seinen Kanten wurde (Abb. 31) eine Aufrißebene angenommen, die also den Querschnitt des Prismas zeigt.

Zunächst bearbeitet ein kegelförmiger *Fräser*, wie er links oben im Aufriß gezeichnet ist, das Prisma; dieses soll nach erfolgter Bearbeitung gezeichnet werden. Die Drehachse des Fräsers ist senkrecht, und er wird in waagerechter Richtung durch das Prisma geführt. Der Fräser besteht aus einem Kegelstumpf und beschreibt bei seiner Verschiebung im Raume ein Prisma von trapezförmigem Querschnitt, der gleich dem Umriß des Fräsers ist. Die Durchdringung dieses vom Fräser beschriebenen „Fräserprismas" mit dem gegebenen ist demnach darzustellen.

Aus der Kante 1 des gegebenen Prismas wird ein Stück herausgefräst, das wir bekommen, wenn wir uns diejenige Kreisscheibe I des Fräserkegels vorstellen, die mit 1 in gleicher Höhe liegt. Sie ist im Aufriß gestrichelt eingezeichnet und erscheint im Grundriß als Kreis I (der kleinste Kreis im Grundriß ist die von oben nicht sichtbare untere Fläche des Fräsers). Im Grundriß können wir die Bewegung der Kreisscheibe I verfolgen. Sie gleitet zwischen zwei waagerechten, parallelen Geraden (wie der Groschen im Schlitz eines Automaten), und man sieht, wie sie die Kante 1

1) Der Leser wird die Methode der Hilfsebenen (S. 16) wiedererkannt haben.

trifft und dann weiter aus der Prismenfläche 1 2 zwei parallele Geraden ausschneidet.

Daß aus der Kante 1 ein Stück weggeschnitten wird, tritt im Grundriß allerdings nicht hervor, weil der untere Teil der senkrechten Prismenfläche 0 1 vom Fräser unbearbeitet und daher sichtbar bleibt. Durch eine Kreisscheibe II in der Höhe von 3 wird aus der Kante 3 ebenfalls ein Stück ausgeschnitten, und aus der Prismenfläche 3 4 ein Parallelstreifen. Der den Fräser unten begrenzende Kreis tritt in die Prismenfläche 01 ein und beschreibt im Inneren des Prismas einen Parallelstreifen bis zur Prismenfläche 4 5. Die aus den Kanten 2, 3 und 4 ausgeschnittenen Stücke zeigt der Grundriß deutlich. Beim Lesen der Zeichnung ist zu beachten, daß die durch Pfeile bezeichneten kurzen Geradenstücke geneigte Geraden darstellen, die in der Prismenfläche 2 3 liegen. Sie sind in die Fläche 2 3 dem Profil des Fräsers entsprechend eingeschnitten.

Die vom Fräser in die rechte Seite des Prismas hineingearbeitete Rinne wird ebenso gefunden. Sie ist übrigens leichter aufzufassen, weil die Prismenfläche 8 9 geneigt ist.

In das Prisma ist noch eine zweite Nut gefräst durch einen Kegelfräser, dessen Spitze oben liegt, der also „unterschneidet". Der Fräser ist rechts vom Prisma abgebildet. Die Konstruktion der Nut geschieht durch Kreisscheiben in den Höhen der Prismenkanten, wie beim ersten Fräser. Von diesem zweiten Fräser wird auch die Prismenfläche 5 6 angegriffen.[1])

5. Abb. 32 zeigt einen Würfel, in den durch einen Kegelfräser eine Öffnung gearbeitet wurde. Achse und Bahn des Fräsers sind geneigt, wie es der obere Aufriß erkennen läßt. Mit I, II, III sind die Kanten des vom Fräser im Raume beschriebenen Prismas bezeichnet.

Verfolgen wir zunächst den Grundkreis des Fräsers, der zwischen den Kanten II und III gleitet. Ein- und Austrittspunkte dieser Kanten aus dem Würfel zeigt der Grundriß sofort; im Aufriß liegen sie auf dem Bilde von II und III. Diese Kanten sind im Grundriß gestrichelt eingezeichnet, soweit sie im Innern des Würfels verlaufen. Die senkrechte Würfelkante 1 schneidet der Grundkreis des Fräsers in einem Punkte A, den der Aufriß unmittelbar zeigt. Von diesem Punkte bis zum Eintrittspunkte P von III in die Würfelfläche 1 4 verläuft der Schnitt, den der Grundkreis des Fräsers in die Fläche 1 4 einschneidet.

Jetzt verfolgen wir die Bahn I der Fräserspitze. Sie schneidet die vergrößert gedachte senkrechte Seitenfläche 1 4 des Würfels in einem Punkte, der, mit P verbunden, den hier anschließenden

1) Sind die bei dieser Nut durch Pfeile bezeichneten Geradenstücke waagerecht oder geneigt?

Teil der in der Fläche 1 4 verlaufenden Kontur des Loches ergibt und damit auch den Schnittpunkt Q mit der oberen Würfelkante 1 4. Genau so verfahren wir bei den drei anderen senkrechten Würfelflächen, wobei zu beachten ist, daß von der Würfelkante 3 oben ein Stück weggeschnitten wird, aus der Würfelkante 1 jedoch ein Stück AB herausgeschnitten. Den Punkt B bekommt man durch Verfolgen der Kontur in der senkrechten Würfelfläche 1 2.

Zur Kontrolle kann man noch den Durchstoßpunkt der Spitzenkante I durch die (vergrößerte) obere Würfelfläche bestimmen. Im Grundriß dieses Punktes müssen sich die auf der Würfeloberfläche erscheinenden beiden Geraden schneiden. Zwischen diesen Geraden blickt man von oben auf die geneigte Ebene, an welcher der Grundkreis des Fräsers entlang gleitet. Der zweite Aufriß, der aus dem ersten in bekannter Weise durch Übertragen der Höhen abgeleitet wurde, läßt diese Fläche ebenfalls erkennen.

6. Abb. 33 zeigt im Aufriß eine — etwa durch Aufschüttung entstandene — Hochebene e, von der ein Abhang a herab zur Erdoberfläche führt. Da dieser Abhang für einen Weg, der von der Erdoberfläche auf die Hochebene hinaufführen soll, zu steil ist, wird der Weg teilweise angeschüttet, teilweise eingeschnitten werden müssen.

Die Abbildung zeigt die beiden den Weg begrenzenden Kanten. Durch diese Kanten sind *Böschungsebenen* zu legen. Beim linken, aufgeschütteten Teil des Weges sollen die Böschungsflächen $\alpha = 45^0$ Steigung haben, und rechts im Einschnitt $\beta = 60^0$.

Geometrisch handelt es sich um die einfache Aufgabe, durch eine Gerade (Wegkante) eine Ebene (Böschungsebene) zu legen und ihre Spurlinie, sowie Schnitt mit anderen Ebenen (Abhang a und Hochebene e) aufzusuchen.

Wir schicken eine wohl selbstverständliche Bemerkung voraus: Im Grundriß berühren die Spuren aller Ebenen, die durch éinen Raumpunkt von der Höhe z gehen und die den Steigungswinkel α haben, einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Grundriß jenes Punktes und dessen Radius $r = \frac{z}{\tan \alpha}$ ist.

Es genügt, die Konstruktion für eine Wegkante, etwa die bei P in den Abhang eintretende, anzugeben. Um P^* wird ein Kreis mit dem Radius $r_1 = \frac{z_P}{\tan \alpha}$ beschrieben, den die Grundrißspur s der Böschungsebene des Wegteils berühren muß. Ferner muß diese Spur vom Spurpunkt S der Wegkante ausgehen; sie ist also die von diesem Spurpunkt an den vorerwähnten Kreis gezogene Tangente. Die Schnittgerade der Böschungsebene mit dem Abhang muß durch P und den Schnittpunkt der Spuren s und a_0 von Böschungsebene und Abhang gehen.

Um die Böschungsebene des eingeschnittenen Wegstückes zu erledigen, fassen wir die Hochebene e als neue Grundrißebene auf, wodurch an der Zeichnung nichts geändert wird. P^* liegt jetzt in dieser neuen Grundrißebene, d. h. auf der nach links fortgesetzt zu denkenden Ebene e. Um P^* wird ein Kreis mit dem Radius $r_2 = \frac{\zeta_p}{\tan \beta}$ geschlagen und an diesen von dem in e liegenden Spurpunkt N der Wegkante eine Tangente gezogen. Mit ζ_p ist der Abstand des Punktes P von e bezeichnet. Die Ermittlung der Radien r_1 und r_2, sowie der Radien ϱ_1 und ϱ_2, die bei der anderen Wegkante gebraucht werden, zeigt die gestrichelte Hilfsfigur rechts oben.

7. In Abb. 34 ist ein auf „Halt" stehendes *Eisenbahnsignal* abgebildet. Die erste Aufrißebene a_1 ist dem Flügel des Signals parallel angenommen. Der Punkt A bezeichnet das Auge eines Lokomotivführers, der in der Blickrichtung r nach dem Signal blickt. Da diese Blickrichtung nicht senkrecht auf Mast und Flügel des Signals steht, ist anzunehmen, daß dem Führer der Winkel zwischen Mast und Flügel des Signals nicht als Rechter erscheint. Würde ihm dieser Winkel größer als ein rechter erscheinen, so liegt die Gefahr nahe, daß ein Führer bei zu spätem Hinblicken nach einem auf „Halt" stehenden Signal den Eindruck eines auf „Fahrt" zeigenden erhalten könnte.

Unter welchem Winkel scheint nun einem im Punkte A befindlichen Auge der Signalflügel zu dem Maste zu stehen? Wir denken uns durch den Sehstrahl r und den Signalflügel, sowie durch r und den Signalmast je eine Ebene gelegt, die wir kurz als Flügel- und Mastebene bezeichnen wollen. Diese beiden Ebenen — deren Schnittlinie r ist — schneiden auf der Netzhaut des Auges, die senkrecht zu r anzunehmen ist, zwei Gerade aus, deren Winkel der scheinbare Winkel ist, den der Führer zwischen Mast und Flügel wahrnimmt.

Es ist also, um unsere Frage zu beantworten, der Winkel zwischen Mast- und Flügelebene zu messen. Wir führen eine neue Aufrißebene parallel zur Blickrichtung r ein, deren Aufrißachse a_2 parallel zu r^* anzunehmen ist, und benutzen (wie in Abb. 25) eine Meßebene senkrecht zu r. Die Grundrißspur der Meßebene ist m_0, und m_2 ihre Aufrißspur. Klappen wir die Meßebene um m_0 in die Grundrißebene, so kommt der Durchstoßpunkt D der Blickgeraden r durch die Meßebene nach D^0. Von den beiden Schnittgeraden der Meßebene mit Mast- und Flügelebene fällt der Grundriß der zur Mastebene gehörenden mit r^* zusammen, denn die Grundrißspur der Mastebene liegt ebenfalls in r^*. Ferner ist die Umklappung dieser Schnittgeraden ebenfalls mit r^* identisch. Um die Grundrißspur der Flügelebene f einzuzeichnen, verlängern wir die Blickrichtung r bis

zu ihrem Spurpunkte R in der Grundrißebene. Da der Flügel eine Höhenlinie in der Flügelebene ist, läuft die Grundrißspur f_0 der Flügelebene durch R parallel zu a_1. Sie schneidet in M die Grundrißspur der Meßebene, und die strichpunktierte Verbindungslinie von D^0 und M ist die Umklappung der Schnittgeraden von Meß- und Flügelebene. Da die Umklappung der Schnittgeraden von Meß- und Mastebene mit r^* zusammenfiel, ist der mit σ bezeichnete Winkel zwischen den umgeklappten Schnittgeraden der gesuchte Winkel zwischen Mast- und Flügelebene, also der Winkel, unter welchem dem Führer Mast und Flügel erscheinen. Er ist kleiner als ein rechter, so daß die oben angedeutete Gefahr nicht besteht.

8. Es ist ein *Flugzeug* so abzubilden, daß seine Längsachse einen gegebenen Neigungswinkel α hat, und das um einen vorgeschriebenen Winkel β um diese gedreht wurde. Die Aufrißebene soll der Längsachse nicht parallel sein (Abb. 35a).

In Abb. 35b ist das Flugzeug in waagerechter und noch nicht gedrehter Lage gezeichnet, um Länge, Tragfläche, Höhen- und Seitensteuer in wahrer Gestalt zu zeigen.

Parallel zur Längsachse des Flugzeuges, die im Punkte M den Grundriß trifft, wird ein erster Aufriß eingeführt (a_1 parallel m^*), und in diesem, unter dem Winkel α geneigt, ihr Aufriß m' eingezeichnet. Darauf können alle in der Längsrichtung des Flugzeuges gemessenen Maße in wahrer Größe abgetragen werden. Länge des Rumpfs, Breite der Tragfläche und der Steuer sind auf m' bezeichnet und werden auf den Grundriß m^* übertragen. Um die Drehung des Flugzeuges um seine Längsachse verfolgen zu können, legen wir durch den Punkt E eine Ebene n senkrecht zu ihr. Ihre Grundrißspur ist n_0, und n' ihr Aufriß. Nach § 6 ist n_0 senkrecht zu m^*, und n' senkrecht zu m' zu ziehen. Diese Normalebene n klappen wir nun um n_0 in die Grundrißebene und denken uns das Flugzeug bei dieser Umklappung starr mit der Normalebene verbunden, so daß es an der Umklappung teilnimmt. Seine Längsachse steht dann nach der Umklappung im Punkte E^0 senkrecht auf der Grundrißebene. Ohne Drehung würde die Tragfläche in der Umklappung parallel zu n_0 erscheinen. Die Drehung um den Winkel β kann in der Umklappung vollzogen werden, und man sieht die gedrehte Lage der Tragfläche, sowie als dazu senkrechte Gerade das Seitensteuer. Das Höhensteuer fällt in dieser „Umklappungsansicht“ mit der Tragfläche zusammen.

Verlängern wir nun die Hinterkante des Höhensteuers nach der Drehung β bis zur Grundrißebene, so kommen wir zu dem auf n_0 liegenden Spurpunkte A der Hinterkante des Höhensteuers. Verlängern wir andererseits die Hinterkante des Seitensteuers, so kommen wir zu ihrem Spurpunkte B auf n_0. Klappen wir jetzt die Ebene n zurück, so bleiben die Punkte A und B liegen und

wir haben sie nur mit E^* zu verbinden, um die Hinterkanten von Seiten- und Höhensteuer des gedrehten Flugzeugs im Grundriß zu erhalten. Spannweite und Höhe von Seiten- und Höhensteuer, sowie die Spannweite der Tragfläche zeigte die Umklappung in wahrer Größe. Durch Lote zur Klappachse n_0 werden diese Maße in den Grundriß übertragen. Durch a_2 führen wir jetzt eine Aufrißebene ein, wie sie die Aufgabe verlangte; zeichnen zuerst den Aufriß E'' vom Punkte E, sodann die Aufrisse A'', B'' und M'' der Spurpunkte A, B, M und verbinden E'' mit ihnen. Damit sind alle erforderlichen Richtungen in den Aufriß übertragen.

Zweites Kapitel.

Die Ellipse.

§ 1. Die Ellipse als Bild eines Kreises und als Schnitt eines Zylinders.

Um das *Grundrißbild eines Kreises* a zu erhalten, der in einer Ebene mit dem Steigungswinkel α liegt, klappen wir diese Ebene um einen waagerecht liegenden Kreisdurchmesser x in die waagerechte Lage (Abb. 36) und ziehen die für eine solche Umklappung im ersten Kapitel, § 5, angegebenen Sätze heran.

Der Durchmesser x ist die Klappachse, die wir jetzt einfach x-Achse nennen wollen. a ist der umgeklappte Kreis, dessen Radius auch a genannt sein soll, und es ist nur nötig, den Abstand jedes Kreispunktes von der x-Achse im Verhältnis $1 : \cos\alpha$ zu verkleinern, um diejenige Kurve zu erhalten, die das Grundrißbild des Kreises ist und die Ellipse genannt wird.

Senkrecht zur x-Achse ziehen wir durch den Mittelpunkt M von Kreis und Ellipse eine Gerade y und es ist klar, daß x und y Symmetrielinien der Ellipse sind.

Zuerst zeichnen wir denjenigen Ellipsenpunkt B^*, der zu dem Schnittpunkte B^0 des Kreises mit y gehört, indem wir

$$MB^* = MB^0 \cdot \cos\alpha$$

machen. Um den Abstand eines beliebigen Kreispunktes P^0 (und damit alle anderen) von der x-Achse im Verhältnis $\frac{MB^*}{MB^0}$ zu verkleinern, schlagen wir um M einen zweiten Kreis b, der durch B^* geht und den Radius $b = MB^*$ hat. Ziehen wir nun einen Radius MP^0, so schneidet die durch seinen Schnittpunkt $\overline{P}$ mit dem Kreise b parallel zu x gezogene Gerade das von P^0 auf x gefällte Lot in dem gesuchten Ellipsenpunkte P^*. Denn der Punkt $\overline{P}$ teilt den Radius MP^0 im Verhältnis $\frac{b}{a} = \cos\alpha$,

und dies Teilverhältnis wird durch die Gerade $\overline{P}P^*$ auf das vom Punkte P^0 auf die x-Achse gefällte Lot übertragen.

So können wir alle Ellipsenpunkte bekommen, indem wir den Radius MP^0 wie eine Kurbel umlaufen lassen und in jeder Stellung $\overline{P}P^*$ parallel zur x-Achse, sowie P^0P^* parallel zu y ziehen. Fassen wir x als Abzissen- und y als Ordinatenachse eines Koordinatensystems auf, so gibt unsere Konstruktion für den Ellipsenpunkt P^* die Koordinaten

$$x = a \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = b \cdot \sin\varphi,$$

wobei φ der Winkel des umlaufenden Radius mit der x-Achse ist $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$. Diese Gleichungen entsprechen völlig unserer geometrischen Konstruktion, wie sie aus dem Prinzip der Umklappung folgte. Auch läßt sich die gewohnte Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ leicht aus ihnen ableiten, wenn man an die Formel $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ denkt.

$MA^* = a$ und $MB^* = b$ werden die *Halbachsen der Ellipse* genannt, das Doppelte davon die Hauptachsen; die Punkte A^* und B^*, sowie die zu diesen in bezug auf M symmetrisch liegenden, heißen die *Scheitel der Ellipse.*

Um nun eine Ellipse bei gegebenen Halbachsen zu zeichnen, besorgt man sich nach der geschilderten Methode hinreichend viele Punkte und verbindet sie mit Hilfe von Kurvenlinealen, was leichter gesagt als getan ist. Soll die Ellipse sehr genau gezeichnet werden, so ist es gut, wenn man zu den Ellipsenpunkten P auch noch deren *Tangenten* einzeichnet, da dadurch das Kurvenlineal mehr Führung bekommt. Ist in einem Kreispunkte P^0 die Kreistangente gezeichnet, so wird sie sich als Ellipsentangente von P^*abbilden. Die Umklappung der Kreistangente und die Ellipsentangente treffen sich auf der Klappachse x, wodurch die Ellipsentangente im Punkte P^* bestimmt ist. Diese Konstruktion versagt allerdings bei Punkten in der Nähe der y-Achse.

Sowohl unsere geometrische Konstruktion wie auch die beiden Gleichungen lassen nun noch eine ganze *andere Deutung der Ellipse* zu: Wir kommen zu dem Ellipsenpunkte P^* (und allen anderen) nämlich auch dadurch, daß wir die Abstände der Punkte $\overline{P}$ des kleinen Kreises b von der y-Achse im Verhältnis $\frac{a}{b}$ vergrößern. Die Konstruktion bleibt genau die gleiche.

Denken wir uns nun im Raume einen *Kreiszylinder,* der senkrecht auf der Grundrißebene steht, dessen Grundkreis der Kreis b ist, dessen Achse sich also im Grundriß im Punkte M abbildet. Schneiden wir diesen Zylinder durch eine Ebene (Abb. 37), die die Gerade y als Höhenlinie enthält und die den Steigungswinkel

$\alpha = \text{arc}\cos\frac{b}{a}$ hat, so bildet sich die entstehende Schnittfigur von Ebene und Zylinderfläche im Grundriß als der Grundkreis b ab, da die projizierenden Lote der Punkte dieser Schnittfigur gerade die Mantellinien des Zylinders sind. Klappen wir die Schnittfigur um die Höhenlinie y als Klappachse in die waagerechte Lage, so finden wir als Schnittfigur unsere Ellipse wieder, denn die Umklappung der Schnittfigur, deren Grundriß der Kreis b ist, geht aus diesem durch Vergrößern der Abstände von der y-Achse im Verhältnis $\frac{a}{b}$ hervor. (Hierbei bedeutet $\overline{P}$ Grundriß und P^* Umklappung.)

Wir haben also *zwei gleichwertige Definitionen der Ellipse:* Sie ist die Grundrißprojektion eines geneigt liegenden Kreises und andererseits der ebene Schnitt eines Kreiszylinders. Aus der zweiten Definition folgt, daß die zu einem Punkte $\overline{Q}$ des Kreises b gehörende Tangente die entsprechende Ellipsentangente des Punktes Q^* auf der y-Achse schneidet, so daß wir jetzt auch in der Nähe der y-Achse liegende Ellipsenpunkte mit Tangenten versehen können.

§ 2. Die Papierstreifenkonstruktion der Ellipse.

Aus den beiden Gleichungen von S. 31 leiten wir noch eine besonders einfache Konstruktion von Ellipsenpunkten bei gegebenen Halbachsen a und b ab. In Abb. 38 ist ein Papierstreifen angedeutet, auf dessen gradliniger Kante UV drei Punkte U, V und R so markiert sind, daß $RV = a$ und $RU = b$ ist. Wird nun der Papierstreifen so bewegt, daß der Punkt U auf der x-Achse und der Punkt V auf der y-Achse entlanggleitet, so beschreibt der Punkt R eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Ist nämlich φ der Winkel zwischen dem Streifen UV und der x-Achse, so liest man ab, daß die Koordinaten des Punktes R in der Tat $x = a \cdot \cos\varphi$ und $y = b \cdot \sin\varphi$ werden.

Auch die *Tangente* im Ellipsenpunkte R ist hierbei leicht zu zeichnen. In die Abb. 36 wurde eine Lage UV des Papierstreifens eingezeichnet. Zieht man durch U und V Parallele zur y- und x-Achse und verbindet deren Schnittpunkt T mit dem Ellipsenpunkte R, so ist TR die Normale im Punkte R, und senkrecht dazu liegt seine Tangente.

§ 3. Die Krümmungskreise der Ellipse.

Wenn man eine Ellipse auch mit großer Sorgfalt aus einzelnen Punkten zeichnet, so wird man bald merken, daß das Auge sehr empfindlich gegen Unsymmetrien der gezeichneten Kurve in den Scheiteln ist. Es liegt nahe, der Symmetrie wegen bei diesen

Scheitelpunkten ein kleines Stück der Ellipse durch einen Kreis zu ersetzen, der die Ellipse im Scheitel berührt und dessen Mittelpunkt mithin auf der zugehörigen Hauptachse liegen muß. Es entsteht die Frage, wie man die Radien dieser Kreise zu wählen hat, damit sie sich möglichst eng an die Ellipse anschmiegen.

Wir betrachten (Abb. 36) die Ellipse in der Nähe des Scheitels B^* und formen ihre Gleichung um. Aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

In der Nähe des Scheitels kommen nur kleine Werte von $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ in Betracht, so daß wir die Wurzel in eine Reihe entwickeln können:

$$y = b \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Glieder von vierter und höherer Potenz bleiben bei hinreichend kleinem $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ gegenüber dem Werte des quadratischen Gliedes unwesentlich.

Ein Kreis vom Radius r, der die Ellipse in B^* berührt, hat die Gleichung

$$x^2 + [y_k + (r - b)]^2 = r^2.$$

Die Ordinate des zu x gehörenden Kreispunktes ist darin mit y_k bezeichnet; zum Unterschiede von der Ellipsenordinate y. Auch diese Gleichung wird umgeformt in:

$$y_k = b - r + \sqrt{r^2 - x^2} = b - r + r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}.$$

Entwickelt man auch hier die Wurzel, so erhält man:

$$y_k = b - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{r} + \cdots.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der entsprechenden Ellipsengleichung erhält man die Ordinatendifferenz zwischen Ellipsen- und Kreispunkten in der Nähe des Scheitels B^*

$$y - y_k = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{b}{a^2}\right) + \cdots,$$

und man sieht, daß $r = \frac{a^2}{b}$ zu wählen ist, um denjenigen Kreis zu bekommen, der sich bei B^* enger als alle anderen an die Ellipse anschmiegt.

Man nennt ihn den Krümmungskreis im Scheitel B^*. Durch eine nach gleichem Schema verlaufende Rechnung findet man für den Krümmungskreis Scheitel A^* den Radius $\frac{b^2}{a}$.

Beide Krümmungskreise sind bei gegebenen Halbachsen a und b einer Ellipse schnell gefunden (Abb. 39): Man zieht durch die Scheitel A^* und B^* die sog. Scheiteltangenten parallel zu a und b; ferner in dem so entstehenden Rechteck MA^*EB^* die Diagonale A^*B^*. Das von der Ecke E auf diese Diagonale gefällte Lot schneidet nun auf den Halbachsen der Ellipse gerade die Mittelpunkte K_1 und K_2 der Krümmungskreise aus. Durch Vergleichen ähnlicher Dreiecke stellt man in der Tat leicht fest, daß

$$K_1A^* = \frac{b^2}{a} \text{ und } K_2B^* = \frac{a^2}{b} \quad \text{ist.}$$

Von diesen Kreisen zeichnet man ein kleines Stück zu beiden Seiten der Scheitelpunkte und schließt die Ellipse daran an.

Kommt es beim *Zeichnen einer Ellipse* mehr auf Schnelligkeit als auf Genauigkeit an, was in der darstellenden Geometrie die Regel ist, so zeichnet man überhaupt gar keine einzelnen Ellipsenpunkte, sondern lediglich die vier Krümmungskreise und paßt die Ellipse mit Kurvenlinealen herein, wie es in Abb. 39 in einem Quadranten gemacht wurde. Dies abgekürzte Verfahren glückt allerdings erst nach einiger Übung, da der Anfänger die Krümmungskreise zu weit auszuziehen pflegt, und es setzt geeignete Kurvenlineale voraus.

Muß man jedoch an einer gezeichneten Ellipse Messungen vornehmen, so kann sie nicht genau genug gezeichnet werden, und man nimmt dann zahlreiche Ellipsenpunkte mit ihren Tangenten zu Hilfe.

§ 4. Konjugierte Durchmesser.

Zieht man in einem Kreise zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser und legt in ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so erhält man ein den Kreis umschließendes Quadrat, dessen Seiten jenen Durchmessern parallel sind (Abb. 40). Als Bild dieser Figur werden wir eine Ellipse, ein sie umschließendes Parallelogramm und zwei dessen Seiten parallele Durchmesser erhalten, wie es Abb. 41 zeigt.

Zwei Ellipsendurchmesser, die Bilder irgend zweier aufeinander senkrechter Kreisdurchmesser sind, heißen *konjugierte Durchmesser*. Fassen wir die Ellipse als ebenen Schnitt eines Kreiszylinders auf, so sind konjugierte Durchmesser solche, die in zwei zueinander senkrechten, durch die Zylinderachse gehenden Ebenen liegen.

Da sich bei der senkrechten Parallelprojektion parallele Gerade wieder in parallele Gerade abbilden, gilt der *Satz*, daß die beiden Tangenten, die in den Endpunkten eines Durchmessers an die Ellipse gezogen werden, dem konjugierten Durchmesser parallel sind.

Sind von einer Ellipse zwei konjugierte Durchmesser gegeben, so ist damit die ganze Ellipse bestimmt und kann punktweise konstruiert werden. In Abb. 41 sind AB und CD als konjugierte Durchmesser gegeben, und das zugehörige, die Ellipse umschließende Parallelogramm kann sofort gezeichnet werden. Nun fassen wir die Ellipse als Bild eines Kreises auf, den Abb. 40 zeigt, wobei den konjugierten Durchmessern senkrechte Kreisdurchmesser entsprechen, die auch mit AB und CD bezeichnet sind.[1]) Ein beliebiger Kreispunkt S kann nun durch zwei Abstandsverhältnisse $\frac{AT}{TM}$ und $\frac{TS}{SR}$ zahlenmäßig festgelegt werden, wenn TR parallel CD gezogen wird. Diese beiden Verhältnisse bleiben bei der Abbildung erhalten, so daß wir in dem Ellipsenbilde 41 den entsprechenden Punkt S der Ellipse zeichnen können. Zuerst wird der Punkt T bestimmt und sodann S auf der Parallelen TR zu CD. So kann man aus allen Kreispunkten alle Ellipsenpunkte bestimmen. Zeichentechnisch wäre dies Verfahren recht mühsam. Wir erkennen jedoch dabei, daß wirklich durch zwei konjugierte Durchmesser eine Ellipse völlig bestimmt ist, und ferner die durchaus nicht selbstverständliche Tatsache, daß das Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse ist. Um eine Ellipse abzubilden, zeichnet man die Bilder von ihren Hauptachsen oder von zwei anderen konjugierten Durchmessern und gewinnt dadurch zwei konjugierte Durchmesser der Bildellipse. Wir merken noch an, daß die beiden Hauptachsen einer Ellipse ein Sonderfall konjugierter Durchmesser sind; es sind die beiden einzigen zueinander senkrechten.

So seltsam es zunächst scheint — sehr oft sind von einer zu zeichnenden Ellipse nicht die Hauptachsen, sondern zwei konjugierte Durchmesser gegeben und es entsteht die Frage, wie man ohne die schwerfällige Methode der Übertragung von Teilverhältnissen in solchen Fällen die Ellipse schnell zeichnet. Für ein freihändiges Skizzieren genügt es, das umschließende Parallelogramm zu zeichnen und die Ellipse geschickt hineinzulegen.[2])

Wir schließen nun so: Ist eine Ellipse durch zwei konjugierte Durchmesser bestimmt, so muß es möglich sein, aus diesen die Hauptachsen der Ellipse abzuleiten. Aber wie?

Wir kehren die Fragestellung zunächst um und nehmen an, von einer Ellipse seien die Hauptachsen gegeben, und es gelte, irgend zwei konjugierte Durchmesser zu zeichnen. Ein Blick auf Abb. 36 lehrt, daß man die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser

---

1) Der Kreis in Abb. 40 ist übrigens in anderem Maßstab wie die Ellipse der Abb. 41 gezeichnet, was für das Folgende unwesentlich ist.

2) Ohne dies Parallelogramm gelingt es übrigens bestimmt nicht, freihändig eine auch nur bescheidenen Ansprüchen genügende Ellipse aus konjugierten Durchmessern zu entwerfen!

dadurch erhält, daß man den umlaufenden Radius MP^0 einmal für einen Winkel φ und dann für einen Winkel $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ zeichnet. Die dadurch entstehenden beiden Ellipsenpunkte sind die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser. Ebenso bekommen wir durch die Papierstreifenkonstruktion, die ja auf dieselben Gleichungen führt, zwei konjugierte Durchmesser, wenn wir den Streifen einmal in die durch den Winkel φ gezeichnete Lage bringen und sodann in die zu $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ gehörige Lage. In Abb. 42 sind U_1V_1 und U_2V_2 zwei derartige Lagen des Streifens, sowie R_1 und R_2 die so erhaltenen Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser. Aus der Abb. 42 lesen wir ferner ab, daß $MU_1 = MV_2$ und $MV_1 = MU_2$ ist, da die rechtwinkligen Dreiecke MU_1V_1 und MU_2V_2 kongruent sind.

Wir denken uns nun andererseits den Halbmesser MR_1 starr mit dem Streifen U_1V_1 verbunden und schwenken beide, ohne den Winkel zwischen Streifen und Halbmesser zu ändern, um den Punkt M nach links herum und zwar um 90^0. Der Punkt R_1 gerät dabei nach $\overline{R}_1$ und der Streifen kommt nach der Schwenkung in die Lage U_2V_2, wobei jetzt aber V_1 nach U_2 und U_1 nach V_2 gerät. U_2V_2 war die zu $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ gehörende Lage des Papierstreifens, und man erkennt, daß sowohl das Stück U_2R_2 wie auch der Abschnitt $\overline{R}_1V_2$ gleich der kleinen Halbachse b der Ellipse ist, und ebenso $U_2\overline{R}_1 = R_2V_2 = a$, gleich der großen Halbachse. Folglich liegt der Halbierungspunkt Z der Strecke U_2V_2 auch in der Mitte zwischen R_2 und $\overline{R}_1$. Ein um diesen Punkt Z über U_2V_2 als Durchmesser geschlagener Kreis geht durch den Mittelpunkt M der Ellipse, da U_2MV_2 ein rechter Winkel ist.

Den soeben dargestellten Gedankengang können wir nun in umgekehrter Richtung durchlaufen, indem wir in der Abb. 42 anfangs nur die konjugierten Halbmesser MR_1 und MR_2 als vorhanden ansehen: Wir schwenken den Halbmesser MR_1 um 90^0 in die gestrichelte Lage $M\overline{R}_1$, ziehen die Gerade $\overline{R}_1R_2$ und halbieren in Z die Strecke $\overline{R}_1R_1$. Um Z schlagen wir einen durch M gehenden Kreis, der auf der Verbindungsgeraden $\overline{R}_1R_2$ die Punkte U_2 und V_2 ausschneidet. MU_2 und MV_2 sind die Richtungen der Hauptachsen. $U_2\overline{R}_1 = R_2V_2 = a$ ist die Länge der großen und $U_2R_2 = \overline{R}_1V_2 = b$ die Länge der kleinen Halbachse.

Auf welcher der Hauptachsenrichtungen die große und auf welcher die kleine Achse liegt, wird dadurch entschieden, daß die Ellipse ja durch die Punkte R_1 und R_2 hindurchgehen muß.

§ 5. Drei Beispiele für das Auftreten konjugierter Durchmesser.

Als erstes Beispiel stellen wir uns die Aufgabe, den *ebenen Schnitt* eines senkrecht auf der Grundrißebene stehenden *Kreiszylinders* darzustellen, ohne daß die Aufrißebene (wie in Abb. 37) senkrecht zur Schnittebene steht. Im Aufriß wird daher die Schnittellipse als Kurve sichtbar werden (Abb. 43).

Vom Zylinder ist der Grundkreis gegeben, ferner die Spur 0 der Schnittebene und ihr Steigungswinkel α. Zunächst wählen wir eine zur Schnittebene senkrechte Aufrißebene (a_1 senkrecht zur Spur 0), in der die Schnittellipse als Gerade erscheint. Die Hauptachsen dieser Ellipse liegen über den aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern AA und BB des Grundkreises. Die kleine Hauptachse BB liegt waagerecht. In einem zweiten Aufriß a_2 erscheint der Zylinder durch die Mantellinien m_1 und m_2 begrenzt, die in den Enden des zu a_2 parallelen Durchmessers des Grundkreises senkrecht stehen. Der Mittelpunkt M der Schnittellipse liegt auf der Achse des Zylinders, und seine Höhe übertragen wir aus dem ersten Aufriß. Ebenso übertragen wir die Endpunkte A und B der Hauptachsen der Schnittellipse vom ersten in den zweiten Aufriß.

Da keine dieser Hauptachsen der zweiten Aufrißebene parallel ist, stehen die neuen Aufrißbilder der Hauptachsen keineswegs aufeinander senkrecht, sind aber konjugierte Durchmesser derjenigen Ellipse, die das Bild der Schnittellipse in der zweiten Aufrißebene ist. Für die Zeichnung dieser Bildellipse sind die Punkte H_1 und H_2 wichtig, in denen sie die Umrißmantellinien m_1 und m_2 berührt. Diese beiden Mantellinien sind daher noch in den ersten Aufriß eingezeichnet, so daß man ihre Längen bis zur Schnittebene, d. h. die Höhen der Punkte H_1 und H_2 abmessen kann. Aus den konjugierten Durchmessern $A''A''$ und $B''B''$ im zweiten Aufriß wurden die Hauptachsen der Aufrißellipse konstruiert und diese selbst gezeichnet. Man benutzt dabei die bekannten Ellipsenpunkte A, B und H nebst ihren Tangenten.

Als zweites Beispiel zeigt Abb. 44 einen Damm, durch den waagerecht ein *Durchlaß von kreisförmigem Querschnitt* führt. Die strichpunktierte Mittellinie dieses Zylinders schneidet die Böschungsebenen des Dammes in den Mittelpunkten der Schnittellipsen, die Ein- und Austrittsöffnung des Durchlasses bilden. Denken wir uns den Zylinder ferner durch eine zur Mittellinie (und Grundrißebene) senkrechte Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein Kreis. Durch die Endpunkte des waagerechten und des senkrechten Kreisdurchmessers gehen Mantellinien, die die Böschungsebenen in den Endpunkten konjugierter Durchmesser der gesuchten Schnittellipsen treffen. Die Grundrisse dieser

Durchmesser sind die konjugierten Durchmesser der Grundrisse der Schnittellipsen, die somit gezeichnet werden können.

Für die rechte Öffnung des Durchlasses soll noch ein Deckel angefertigt werden. Wir klappen die rechte Böschungsebene um ihre Spur in die Grundrißebene hinein und sehen zu, wohin der Mittelpunkt und die beiden konjugierten Durchmesser der Ellipse zu liegen kommen. Aus diesen ist dann die wahre Gestalt der Schnittellipse als Umriß des Deckels zu zeichnen. Sollte etwa diese Zeichnung in der Werkstatt als Schablone für das Ausschneiden des Blechdeckels dienen, so haben wir einen Fall, bei dem es auf sehr genaue Zeichnung einer Ellipse ankommt.

Als drittes Beispiel soll *in eine Kugel durch einen Kegelfräser eine Nut gefräst* werden (Abb. 45). Wir wählen die Grundrißebene senkrecht zur Achse des Fräsers und eine Aufrißebene (a_1) willkürlich, nicht etwa parallel der Bewegungsrichtung des Fräsers, um ein eindrucksvolleres Bild der bearbeiteten Kugel zu bieten. Rechts oben ist der Fräser zu sehen und links die Kugel, die im Grund- und Aufriß zunächst (in Blei) durch ihre Umrißkreise dargestellt wird. Es sind dies Kreise, die im Auf- und Grundriß um das Bild M des Kugelmittelpunktes mit dem Kugelradius geschlagen werden. Bei den Bildern der bearbeiteten Kugel werden sie nur teilweise zu sehen sein.

Die Bewegungsrichtung des Fräsers ist der Grundrißebene parallel, und senkrecht zu ihr nehmen wir eine zweite Aufrißebene a_2 an. In dieser sehen wir die Kugel und — in der Bewegungsrichtung des Fräsers blickend — das Profil der eingefrästen Nut. Der Fräser durchfährt im Raume ein Prisma, dessen Seitenflächen die Kugel in drei Kreisen k_1, k_2, k_3 schneiden. Alle drei Kreise erscheinen in diesem zweiten Aufriß als Gerade.

Durch Lote vom Kugelmittelpunkt M auf die Ebenen dieser Kreise erhalten wir im zweiten Aufriß sogleich die Mittelpunkte K_1, K_2, K_3 dieser Kreise und können hier auch ihre Radien abmessen. Der waagerecht liegende Kreis k_1 bildet sich im Grundriß als Kreis und im ersten Aufriß als waagerechte Gerade ab. Die vom Kugelmittelpunkt auf die Ebenen der beiden anderen Kreise gefällten Lote bilden sich im Grundriß als eine durch M parallel zu a_2 laufende Gerade ab. Die Grundrisse der Kreismittelpunkte K_2 und K_3 liegen auf diesen Loten und können somit im Grundriß eingezeichnet werden. Der Kreis k_3 wird sich im Grundriß als Ellipse k_3 mit dem Mittelpunkt K_3 darstellen, und von dieser Ellipse können sofort die Hauptachsen angegeben werden. Der waagerecht liegende Durchmesser vom Kreise k_3, der im zweiten Aufriß als Punkt erscheint, wird im Grundriß die große Hauptachse, die durch K_3 senkrecht zu MK_3 geht und deren Länge gleich dem Radius des Kreises k_3 ist. Der Grundriß des dazu senkrechten Kreisdurchmessers fällt in die Richtung MK_3

und seine Endpunkte sind aus dem zweiten Aufriß durch Lote auf a_2 zu erhalten. Da von diesen beiden Kreisdurchmessern einer waagerecht liegt, bleibt der von ihnen gebildete rechte Winkel im Grundriß erhalten, so daß wir tatsächlich durch den Grundriß dieser beiden Kreisradien die Hauptachsen der Ellipse k_3 bekommen haben.

Von der Ellipse k_3 ist nicht etwa die ganze Peripherie zu zeichnen, sondern nur der Teil oberhalb der Ebene von k_1, oder oberhalb der Kante n, in der zwei Begrenzungsebenen der Nut aneinanderstoßen. Im Grundriß ist diese Kante n gestrichelt gezeichnet und man sieht, wie die Ellipse k_3 an dieser Kante endigt. Ferner ist die Ellipse k_3 im Grundriß nur so weit auszuziehen, als der Kreis k_3 auf der oberen Halbkugel verläuft, denn Linien auf der unteren Halbkugel sind im Grundriß unsichtbar. Der waagerecht liegende Äquator, der die obere Halbkugel von der unteren trennt, erscheint im zweiten Aufriß als die strichpunktierte Gerade durch M. Im Grundriß ist dieser Äquator der Umriß der Kugel. Im Punkte B_3 trifft — wie der zweite Aufriß zeigt — der Kreis k_3 diesen Äquator. Der Grundriß des Punktes B_3 liegt auf dem Umrißkreis. Bis hierher ist die Ellipse k_3 auszuziehen und von da ab bis zur Kante n zu stricheln. Symmetrisch zu k_3 in bezug auf den Mittelpunkt M ist die Ellipse k_2 zu zeichnen. Im zweiten Aufriß sieht man noch, daß aus dem waagerechten Äquator das Stück zwischen B_2 und B_3 herausgefräst ist, so daß im Grundriß der Umrißkreis nur bis zu den Punkten B_2 und B_3, sowie den entsprechenden Punkten auf der anderen Seite zu zeichnen ist.

Im Grundriß sind jetzt deutlich die von der Kugel übrigbleibenden „Backen" zu sehen, zwischen denen der Fräser hindurchgleitet. Man sieht im Grundriß auch die waagerechte, vom Boden des Fräsers berührte Ebene, soweit sie nicht von den Backen verdeckt wird.

In den ersten Aufriß werden nun Mittelpunkte und diejenigen Durchmesser der beiden Kreise k_2 und k_3 übertragen, die bereits im Grundriß benutzt wurden und hier als Hauptachsen der Ellipse erschienen. Im ersten Aufriß werden sie konjugierte Durchmesser der Ellipsen k_2 und k_3. Auch im ersten Aufriß sind diese Ellipsen nur oberhalb der Kante n zu zeichnen; außerdem wird die Ellipse k_2 von der vorderen Backe teilweise verdeckt.

Der Umrißkreis der Kugel, der diese im ersten Aufriß begrenzt, liegt in einer zur Aufrißebene parallelen und durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene. Er erscheint mithin im Grundriß als die strichpunktierte Gerade durch M. Dieser Kreis teilt die Kugel in eine vordere und hintere Halbkugel, und im ersten Aufriß ist nur sichtbar, was auf der vorderen Halbkugel liegt. Von dem Kreise k_3 liegt, wie der Grundriß zeigt, nur das von dem Punkte A_3 nach links unten laufende Stück auf der vorderen Halbkugel.

Nur dies ist daher im ersten Aufriß auszuziehen und zwar von dem auf dem Umrißkreise liegenden Punkte A_3 bis zur Kante n. Im Punkte A_3 geht die Aufrißellipse k_3 nach rechts in den Umrißkreis der Kugel über! Von A_3 bis C_3 sieht man im Aufriß diesen Umrißkreis und erst von C_3 ab wieder die Ellipse k_3; denn wie der Grundriß zeigt, ist C_3 derjenige Punkt, in dem der Kreis k_3 den Grenzkreis zwischen vorderer und hinterer Halbkugel zum zweiten Male trifft. Zwischen A_3 und C_3 ist die Kugeloberfläche erhalten geblieben; zwischen A_2 und A_3 ist der Grenzkreis weggefräst und links von A_2 wieder erhalten bis D_2. Das Stück A_2D_2 des Kreises k_2 liegt auf der Vorderseite der Kugel und ist daher im Aufriß neben dem Umriß sichtbar. Der Kreis k_2 bleibt noch rechts von A_2 sichtbar, trotzdem er auf der hinteren Halbkugel verläuft, da von der Kugel hier ein Teil weggefräst ist. Das Bild des Kreises k_2 wird dann von der vorderen Backe verdeckt. Schließlich ist unterhalb der Ebene des Kreises k_1 die Kugel unversehrt und ihr Umriß daher im Aufriß sichtbar.[1])

§ 6. Zwei Beispiele für die Papierstreifenkonstruktion.

Von dem Prinzip der Papierstreifenkonstruktion wird bei den folgenden Aufgaben eine eigenartige Anwendung gemacht. Es soll zunächst ein *Rad mit seiner Welle* gezeichnet werden. Geometrisch gesprochen: Ein Kreis, auf dessen Ebene in seinem Mittelpunkt eine Gerade senkrecht steht. Weder Grund- noch Aufrißebene sollen der Welle des Rades parallel sein.

In Abb. 46 ist die Welle w und der Mittelpunkt M des Rades, sowie dessen Durchmesser gegeben. Die Welle steht senkrecht auf allen Kreisdurchmessern, also auch auf dem waagerecht liegenden h, dessen Grundriß h^* die große Hauptachse der Bildellipse des Rades im Grundriß wird. Der Winkel zwischen der Welle w und diesem Durchmesser h erscheint auch im Grundriß als rechter. Analog bildet der Aufriß f' des Radhalbmessers f, welcher der Aufrißebene parallel ist, die große Halbachse der Bildellipse des Rades im Aufriß. Diese Ellipse muß ferner durch die Endpunkte H'_1 und H'_2 des Aufrisses h' von dem waagerechten Durchmesser h gehen.

1) Das Verfolgen der Umrißlinien und die Feststellung von Sicht- oder Unsichtbarkeit einzelner Linien im Grundriß und in beiden Aufrissen ist recht lehrreich, weil es zum gleichzeitigen Auffassen der drei Bilder zwingt und den Beschauer nötigt, sich daraus die Vorstellung des Körpers aufzubauen. Wem dies an der Abb. 45 restlos gelingt, der ist vom Ziel seiner Beschäftigung mit darstellender Geometrie nicht mehr weit entfernt.

Die Richtung der kleinen Hauptachse fällt mit dem Aufriß w' der Welle zusammen. Zur Zeichnung der Ellipse im Aufriß ist mithin nur noch die Länge b_a ihrer kleinen Hauptachse nötig. Wir denken uns diese Ellipse nun durch die Papierstreifenkonstruktion erzeugt, wobei ein Endpunkt (V) des Streifens auf f' und der andere (U) auf w' gleiten würde. Nun können wir diejenige Lage des Streifens einzeichnen, die zum Ellipsenpunkte H'_1 gehört, der als Endpunkt von h' bekannt ist. Der Punkt (U) des Streifens muß von H'_1 den Abstand f' haben, da ja f' gleich der Länge der großen Halbachse ist; folglich kann man (U) durch einen Zirkelschlag um H'_1 finden und damit die zum Ellipsenpunkte H'_1 gehörende Lage des Papierstreifens. Sein Abschnitt von H'_1 bis (V) gibt die Länge b_a der kleinen Halbachse, die noch fehlte, um die Ellipse zu zeichnen.

Im Grundriß benutzt man gleicher Weise einen Endpunkt von f^* zur Ermittlung der kleinen Halbachse b_g. Die Abbildung des Rades mit seiner Welle im Grund- und Aufriß ist damit fertig. Fast man das Rad als Kreisscheibe auf, so wird die Welle teilweise verdeckt.

Nun soll noch der Umfang des Rades in 16 *gleiche Teile geteilt werden.* Dazu klappen wir zuerst im Grundriß die Ebene des Radkreises um den Durchmesser h in die waagerechte Lage und teilen den Kreis in 16 gleiche Teile. Die Teilpunkte werden durch Lote zu h^* auf die Ellipse übertragen.

Wir haben die Teilung so begonnen, daß die Endpunkte H des waagerechten Durchmessers h Teilpunkte sind, und das ist bei der Teilung im Aufriß wohl zu berücksichtigen. Hier wird der Kreis um den Durchmesser f in eine Lage parallel zur Aufrißebene geklappt und eingeteilt. Den Punkt H'_2 muß man vorher auf den umgeklappten Kreis übertragen und von ihm aus die Teilung beginnen.

Das gleiche Prinzip führt auch bei folgender Aufgabe zum Ziel: *Ein zylindrisches Rohr führt von der Wand eines Turbinenhauses zum Erdboden* (Abb. 47). Die Rohrachse liegt aber windschief zu den Kanten des Hauses.

In Abb. 48 wurde der Erdboden zum Grundriß und die Wand zur Aufrißebene genommen. Im Punkte A tritt die Achse des Rohres aus der Wand und im Punkte B trifft sie den Erdboden. Der Rohrzylinder wird Erdboden und Wand in Ellipsen schneiden. Der Rohrdurchmesser wird diesmal in beiden Ellipsen die kleine Hauptachse abgeben. Bei der Ellipse im Aufriß wird sie auf dem Aufriß m' der Rohrmittellinie senkrecht stehen; ebenso wird die kleine Hauptachse der Schnittellipse mit dem Erdboden senkrecht zum Grundriß m^* der Rohrachse liegen.

C_1C_2 und D_1D_2 sind also die kleinen Hauptachsen der Ellipsen im Boden und an der Wand. Die großen Hauptachsen können nun

nach dem Papierstreifenprinzip ermittelt werden, sobald von jeder Ellipse noch ein Punkt gefunden ist. Die vom Punkte C_1 ausgehende Mantellinie c des Rohres trifft die Wand im Punkte P, wodurch hier der gesuchte Ellipsenpunkt ermittelt ist. Ebenso trifft die vom Punkte D_2 der Wand ausgehende Mantellinie d den Boden im Punkte Q. Die Hilfslinien zur Ermittlung der großen Halbachsen sind bei P und Q eingezeichnet. In den Punkten P und Q verlaufen die Ellipsentangenten übrigens senkrecht zur Aufrißachse, da es die am weitesten rechts und links liegenden Punkte des Rohres überhaupt sind. Es ist vielleicht nicht überflüssig, hervorzuheben, daß der Grundriß d^* der Mantellinie d, deren Aufriß d' oben den Umriß des Rohres begrenzt, nicht mit m^* zusammenfällt, ebensowenig der Aufriß c' mit m'.

Nachdem so das Rohr abgebildet ist, soll auch noch die *Abwicklung des Rohrmantels* gezeichnet werden und zwar möglichst genau.

In einem beliebigen Punkte M der Rohrmittellinie legen wir eine zu dieser senkrechte Ebene. Diese schneidet das Rohr in einem Kreise k. Bei der Abwicklung des Rohres streckt sich dieser Kreis zu einer Geraden g von der Länge $2r\pi$ (r = Radius des Rohres). In Abb. 49, die die Abwicklung zeigt, ist g eingezeichnet. Der Umfang des Kreises k wird in gleiche Teile eingeteilt und durch die Teilpunkte werden Mantellinien des Rohres gezogen. Sie erscheinen in der Abwicklung (Abb. 49) als senkrecht auf g stehende Gerade. Nun mißt man auf jeder dieser Mantellinien einmal das untere Stück vom Boden bis zum Kreise k, sodann das obere von k bis zur Wand reichende und trägt diese Stücke in der Abwicklung zu beiden Seiten von g ab, verbindet die Endpunkte durch Kurven (es sind Sinuslinien!) und hat damit die Abwicklung des Rohres geleistet.

Die Messung der erwähnten Mantellinienstücke geht so vor sich: Wir klappen den Kreis k um seinen waagerechten Durchmesser in die waagerechte Lage und teilen seinen Umfang ein, wobei wir zweckmäßig von einem Endpunkte N des waagerechten Durchmessers ausgehen. T^0 sei ein Teilpunkt. Nun ist der Grundriß von k eine Ellipse, die vollständig einzuzeichnen überflüssig ist. Es genügt vielmehr, nur die Grundrisse T^* der Teilpunkte zu zeichnen. Dazu ist um M^* noch der kleine Kreis geschlagen, dessen Radius gleich der kleinen Halbachse derjenigen Ellipse ist, die das Grundrißbild von k sein würde, und der nach dem Papierstreifenprinzip gewonnen wurde. Zieht man nun eine Mantellinie durch den Teilpunkt T^0, so geht ihr Grundriß durch T^*. Ihr Spurpunkt S liegt auf der Bodenellipse, und oben trifft sie die Wand in einem Punkte R.

Die Stücke $S\,T^*$ und T^*R^* kann man jetzt messen. Es sind noch nicht die wahren Längen der Mantellinie. Besorgt man

sich aber durch einen — hier nicht eingezeichneten — zu ihr parallelen Aufriß die wahre Länge der Rohrmittellinie AB und vergleicht diese Länge mit der ihres Grundrisses A^*B, so hat man alle Strecken ST^* und R^*T^* im Verhältnis $\frac{AB}{A^*B}$ zu vergrößern, um die wirklichen Längen zu erhalten, die in Abb. 49 einzutragen sind. Vorher sind die Teilpunkte T nach g zu übertragen, indem man g in ebensoviel Teile wie den Kreisumfang von k einteilt.

Die Messung T^*S ist nun insofern unzuverlässig, als man sich nicht auf die Zeichnung der Bodenellipse und eine genaue Lage des Punktes S auf dieser verlassen kann. Um den Spurpunkt S einer Mantellinie t genauer zu bekommen, wird noch ihr Aufriß t' konstruiert. Dazu ist der Kreis k um einen zur Aufrißebene parallelen Durchmesser parallel zum Aufriß zu klappen und wieder einzuteilen. Da im Grundriß der Punkt N, den der Kreis k mit der Mantellinie c gemeinsam hat, zum Anfangspunkt der Einteilung gewählt war, muß dies auch im Aufriß der Fall sein. Der Schnitt des Aufrisses c' jener Mantellinie mit dem umgeklappten Kreise gibt den Anfangspunkt N^0 der Teilung. T^0 bedeutet im Grund- und Aufriß den gleichen Teilpunkt, wenn die Kreisbögen N^*T^0 und N^0T^0 gleich sind, und durch ihn ist parallel zu m' der Aufriß t' der zugehörigen Mantellinie zu zeichnen, wodurch dann deren Spurpunkt S genau bestimmt wird.[1])

§ 7. Die Brennpunkte der Ellipse.

Abb. 50 zeigt noch einmal den Schnitt einer Ebene mit einem senkrechten Zylinder in einer zur Schnittebene senkrecht angenommenen Aufrißebene. M ist der Mittelpunkt der dabei entstehenden Ellipse; A, B sind die Endpunkte der großen Hauptachse. In den Zylinder schieben wir von oben und unten je eine Kugel k_1 und k_2; sie berühren den Zylinder in waagerecht liegenden Kreisen w_1 und w_2 sowie die Schnittebene in den Punkten F_1 und F_2.

Alle von einem Raumpunkte an eine Kugel gelegten Tangenten sind bekanntlich gleich lang. Von diesem Satz machen wir in der Weise Gebrauch, daß wir von einem Ellipsenpunkte P zunächst zwei Tangenten an die obere Kugel k_1 legen. Die eine soll in der Schnittebene liegen und geht somit von P nach dem Berührungspunkte F_1 von Kugel- und Schnittebene. Die andere soll auf dem Zylindermantel verlaufen, ist somit eine Mantellinie und berührt die Kugel im Punkte Q des Kreises w_1. Die

1) Der Leser möge die Abwicklung ausschneiden und zum Rohr zusammenrollen.

Längen dieser Tangenten PF_1 und PQ sind gleich, und die Länge PQ erscheint in unserem Aufriß in wahrer Größe. Ebenso ziehen wir an die untere Kugel k_2 die Tangenten PF_2 und PR, die auch einander gleich sind. Man sieht, daß die Summe der Längen von PF_1 und PF_2 gleich RQ ist, d. h. gleich dem Abstande der beiden Berührungskreise w_1 und w_2. Mithin ist die Summe dieser Abstände bei allen Ellipsenpunkten die gleiche und folgendes bewiesen: Auf der großen Hauptachse einer Ellipse gibt es zwei zum Mittelpunkte M symmetrisch liegende Punkte F_1 und F_2 mit der Eigenschaft, daß die Summe der Abstände eines jeden Ellipsenpunktes von diesen stets die gleiche ist. Daß diese Summe gleich der Länge $2a$ der großen Hauptachse und der Abstand der Punkte F vom Mittelpunkte M der Ellipse gleich $\sqrt{a^2 - b^2}$ ist (b: kleine Halbachse) folgt weiter aus der doppelten Symmetrie der Ellipse in Bezug auf ihre Hauptachsen.

Auf diesem Satze beruht die bekannte „Fadenkonstruktion" einer Ellipse, deren Hauptachsen bekannt sind. Bei der Zeichnung sehr großer Ellipsen macht man davon Gebrauch. Ferner gilt der bekannte Satz, daß die von F_1 und F_2 zu einem Ellipsenpunkte P gezogenen Geraden gleiche Winkel mit der Ellipsentangente im Punkte P bilden, weshalb die Punkte F_1 und F_2 „Brennpunkte" genannt werden. Dieser Satz erlaubt, bei der Fadenkonstruktion zu jedem Ellipsenpunkte die Tangente zu zeichnen.

Drittes Kapitel.

Die Kegelschnitte.

§ 1. Die Ellipse als Kegelschnitt.

Abb. 51 zeigt den Schnitt eines Kreiskegels, dessen Achse senkrecht steht, mit einer Ebene, deren Steigungswinkel kleiner als derjenige der Mantellinien ist, und zwar in einer Aufrißebene, die zur Schnittebene senkrecht angenommen wurde.

Wir legen Kugeln so in den Kegel, daß sie seinen Mantel längs Kreisen w_1 und w_2, sowie die Schnittebene e in Punkten F_1 und F_2 berühren. Ziehen wir von dem auf der Kegelfläche liegenden Punkte P der Schnittfigur eine Tangente an die obere Kugel bis zum Punkte F_1 und eine zweite als Mantellinie bis zum Kreise w_1 und gleicher Weise Tangenten an die untere Kugel, so sieht man, daß die Summe dieser Tangentenlängen gleich dem zwischen den Kreisen w_1 und w_2 liegenden Stück der Mantellinien des Kegels ist und für alle Punkte der Schnittkurve den gleichen Wert hat. Folglich ist unsere Schnittkurve eine Ellipse. Die Enden der großen Hauptachse sind durch Pfeile bezeichnet;

M ist ihr Mittelpunkt. Die kleine Hauptachse steht in M auf der Aufrißebene senkrecht, und die Halbachse reicht vom Punkte M bis zum Kegelmantel. Um ihre Länge zu bestimmen, schneiden wir aus dem Kegel durch eine waagerechte Ebene, die durch M geht und in der die kleine Halbachse liegt, einen Kreis aus und klappen diesen um seinen zur Aufrißebene parallelen Durchmesser herunter. B sei der auf diesem Kreise liegende Endpunkt der kleinen Halbachse, deren Länge wir in der Umklappung als MB^0 finden.

§ 2. Die Hyperbel.

Der Kegel wird durch Verlängerung seiner Mantellinien über die Spitze S hinaus zu einem Doppelkegel vervollständigt. Abb. 52 zeigt ihn oben links im Aufriß I. Wir schneiden diesen Doppelkegel durch eine Ebene e, die parallel seiner Achse im Abstande b und senkrecht zur Aufrißebene angenommen wurde. Es entsteht eine Schnittfigur, Hyperbel genannt, die aus zwei kongruenten Zweigen besteht, die auf den Halbkegeln liegen; der tiefste Punkt des oberen Zweiges und der höchste Punkt des unteren sind durch Pfeile bezeichnet. Fällt man von der Spitze des Kegels auf die Schnittebene ein Lot nach dem Punkte M und legt durch M eine Senkrechte zur Aufrißebene, so wird dies eine Symmetrielinie der Schnittkurve sein. Eine zweite ist die durch M zur Kegelachse gezogene Parallele. Abb. 52 zeigt in dem unten rechts liegenden Aufriß II die wahre Gestalt der Schnittfigur. Die im ersten Aufriß durch Pfeilspitzen bezeichneten Punkte der Schnittkurve sind hier A und B genannt. Die beiden Symmetrielinien x und y sind strichpunktiert eingezeichnet.

Wir legen wiederum zwei Kugeln in die obere und unter Hälfte des Kegels, die die Kegelfläche in den Kreisen w_1, w_2 und die Schnittebene in den Punkten F_1 und F_2 berühren. Von einem Punkte P der Schnittkurve ziehen wir Tangenten an die untere und obere Kugel. Je eine in der Schnittebene verlaufende (PF_1 und PF_2) und eine zweite als beide Kugeln berührende Mantellinie des Kegels. Die Differenz der Tangenten PF_2 und PF_1 ist gleich dem zwischen den Kreisen w_1 und w_2 liegenden Stück der Mantellinie und somit für alle Punkte der Schnittkurve konstant.[1]) Es gibt also auf der Symmetrielinie x (Aufriß II) zwei Punkte F_1 und F_2 in gleichem Abstand von M, derart, daß die Differenz der Abstände r_1 und r_2 von diesen Punkten $F_{1,2}$ bei allen Kurvenpunkten Q die gleiche ist. Daß die Tangente in einem Hyperbelpunkte Q den Winkel zwischen r_1 und r_2 halbiert, wird dem Leser bekannt sein.

1) Vgl. § 7 auf Seite 43.

Wir bezeichnen die Punkte A und B als *Scheitel der Hyperbel;* die Strecke $AB = 2a$ als *Hauptachse;* die Hälfte davon als Halbachse. Die in M zu AB senkrecht stehende Symmetrielinie y ist die sog. *Nebenachse* der Hyperbel. F_1 und F_2 sind ihre *Brennpunkte.* Läßt man Q mit B zusammenfallen, so sieht man, daß die konstante Differenz $r_2 - r_1 = 2a$ ist.

Sind demnach von einer Hyperbel Scheitel- und Brennpunkte gegeben, so lassen sich ihre Kurvenpunkte dadurch zeichnen, daß man um die Brennpunkte Kreise mit um $2a$ verschiedenen Radien schlägt.

Nennt man ψ den Winkel zwischen den Mantellinien und der Achse des Kegels, so zeigt der Aufriß I, daß zwischen diesem Winkel, dem Abstand b der Schnittebene von der Kegelachse und der Halbachse a der Hyperbel die Beziehung

$$\tan \psi = \frac{b}{a}$$

besteht. Legen wir durch einen Hyperbelpunkt P eine waagerechte Ebene im Abstande x unterhalb der Kegelspitze (oder auch unterhalb M), so schneidet sie den Kegel in einem Kreise vom Radius

$$p = x \quad \tan \psi = x \cdot \frac{b}{a},$$

der im Grundriß eingezeichnet ist. Bezeichnet y den Abstand des Punktes P von der Hauptachse der Hyperbel, so zeigt der Grundriß, daß

$$b^2 + y^2 = p^2 = x^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

ist, woraus die gewohnte, auf Haupt- und Nebenachse bezogene Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt.

Im Aufriß II sind noch durch m_1 und m_2 diejenigen beiden Mantellinien abgebildet, die der Schnittebene parallel sind. Die Geraden m_1 und m_2 bilden mit der Hauptachse den Winkel ψ und genügen den Gleichungen

$$\overline{y} = \pm x \cdot \tan \psi = \pm x \cdot \frac{b}{a}.$$

Die Differenz der Ordinaten von zu gleicher Abszisse x gehörenden Punkten der Hyperbel und einer dieser Geraden — etwa m_1 — ist

$$\overline{y} - y = x \cdot \frac{b}{a} - x \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{x^2}}.$$

Für hinreichend weit ab liegende Hyperbelpunkte wird dabei

$\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{x^2}$ beliebig klein. Wir dürfen also die Wurzel nach dieser Größe entwickeln und, ohne eine noch so klein vorgeschriebene Fehlergrenze zu überschreiten,

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots$$

setzen. Die Ordinatendifferenz wird somit

$$\bar{y} - y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} + \cdots,$$

also beliebig klein für hinreichend weit entfernte Punkte.

Man nennt daher diese Geraden m_1 und m_2 die *Asymptoten der Hyperbel.* Sie schmiegt sich diesen immer dichter an, je weiter man sie von den Scheiteln weg verfolgt.

Die Asymptoten sind zeichentechnisch recht wichtig, weil sie sofort eine Übersicht über den Verlauf einer Hyperbel geben. Ist f der Abstand der Brennpunkte F vom Mittelpunkte einer Hyperbel, so kann man aus dem linken Aufriß I durch Vergleich zweier kongruenter rechtwinkliger Dreiecke mit den Katheten a and b ablesen, daß $f = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Mithin kann man stets die Brennpunkte aus den Asymptoten und umgekehrt ableiten. Sind Scheitel und Asymptoten einer Hyperbel gegeben, so zieht man — etwa im Scheitel B — senkrecht zur Hauptachse die Scheiteltangente. Das Stück der Asymptote vom Mittelpunkte M bis zum Schnitt mit dieser Scheiteltangente ist dann gerade $\sqrt{a^2 + b^2}$ und ein Zirkelschlag um M mit diesem Radius liefert die Brennpunkte.

Für den Radius des *Krümmungskreises im Scheitel einer Hyperbel* gibt eine der auf S. 33 durchgeführten völlig analoge Rechnung den Betrag $\frac{b^2}{a}$. Ein im Schnittpunkt der Scheiteltangente mit der Asymptote auf dieser errichtetes Lot schneidet, wie ein Vergleich ähnlicher Dreiecke lehrt, auf der Hauptachse den Krümmungsmittelpunkt aus.

Hat man Scheitelpunkte, Asymptoten und Krümmungskreise, so genügt es meistens, mit Hilfe der Brennpunkte noch einige weiter entfernte Punkte der Hyperbel zu konstruieren, um danach mit einem Kurvenlineal die Kurve einzeichnen zu können. Bei freihändigem Skizzieren muß man die Asymptoten unbedingt einzeichnen, da es hoffnungslos ist, ohne diese eine brauchbare Hyperbel zu erhalten.

Liegt eine Hyperbel in einer zur Bildebene geneigten Ebene, jedoch so, daß Haupt- oder Nebenachse jener parallel ist, so ist ihr Bild wieder eine Hyperbel, was aus dem Prinzip der Umklappung und der Form der Hyperbelgleichung leicht abzu-

leiten ist. Achsen und Asymptoten der Bildhyperbel entsprechen denen der im Raume liegenden Hyperbel. Auch eine beliebig im Raume liegende Hyperbel bildet sich wieder als Hyperbel ab, was wir hier ohne Beweis angeben.

Wird ein Kegel von einer Ebene geschnitten, die seiner Achse nicht parallel und deren Steigungswinkel größer als derjenige der Mantellinien ist, so wird auch in diesem Falle die Schnittfigur eine Hyperbel. Abb. 53, die ebenso wie Abb. 52 zu lesen ist, läßt dies erkennen, da man wieder mit zwei Kugeln, die jetzt nur verschiedene Durchmesser haben, den Beweis der charakteristischen Brennpunktseigenschaft leicht führen kann. Die Pfeile weisen auf die Scheitel, und dazwischen in der Mitte liegt der Mittelpunkt M der Hyperbel. Die von ihm ausgehenden Asymptoten haben die Richtung derjenigen Mantellinien m des Kegels, die von einer Ebene ausgeschnitten werden, die durch die Kegelspitze parallel zur Schnittebene geht. Diese beiden Mantellinien sind, wie auch vorher Abb. 52 erkennen ließ, die einzigen, die keinen Punkt mit der Schnittebene gemeinsam haben. Will man den Winkel χ zwischen den Asymptoten und der Hauptachse der Hyperbel haben, der jetzt aber nicht der gleiche wie zwischen Achse und Mantellinien des Kegels ist, so klappt man die Ebene der Mantellinien um, wie es der Grundriß zeigt.

§ 3. Die Parabel.

Es bleibt noch die Schnittkurve zu besprechen, die entsteht, wenn die Schnittebene *gleiche* Steigung wie die Mantellinien des Kegels hat. In Abb. 54 ist e die Schnittebene; der Aufriß zeigt sie parallel zur Mantellinie, die den Umriß des Kegels links begrenzt. Rechts unten ist eine neue Bildebene parallel zur Schnittebene eingeführt, um die Schnittkurve, eine sog. Parabel, in wahrer Gestalt zu zeigen. Die Parabel hat nur eine Symmetrieachse y; der Pfeil im Aufriß weist auf ihren Scheitel A. Irgendeinen Punkt P der Parabel kann man etwa so in die neue Bildebene einzeichnen, daß man in der Höhe z unterhalb seiner Spitze den Kegel durch eine waagerechte Ebene in einem Kreise k schneidet. Die Schnittebene e wird von dieser Ebene in einer Höhenlinie h geschnitten. Diese Höhenlinie trifft den Kreis k in einem Punkte P der Parabel. Der Radius des Kreises k ist $z \cdot \tan\psi$, wo ψ wieder den Winkel zwischen Kegelachse und Mantellinien bezeichnet. Der Abstand y der Höhenlinie h vom Scheitelpunkte A der Parabel erscheint im Aufriß als das Stück $A'P'$ und ist $y = \frac{z-q}{\cos\psi}$, worin q diejenige Höhe bezeichnet, um die der Scheitel der Parabel unterhalb der Kegelspitze liegt, ein Maß, das die Schnittebene völlig festlegt.

Ist ferner x der in der Umklappung k^0 des Kreises k meßbare Abstand des Parabelpunktes P von der Symmetrieachse y, so entnehmen wir der Umklappung, daß

$$x^2 + [(z - 2q) \cdot \tan \psi]^2 = z^2 \cdot \tan^2 \psi$$

ist, weil $(z - 2q) \cdot \tan \psi$ der Abstand des Punktes P' von der Kegelachse ist. Eliminiert man z aus dieser Gleichung und der vorerwähnten $y = \frac{z - q}{\cos \psi}$, so erhält man die *Gleichung der Parabel*

$$y = \frac{x^2 \cdot \cos \psi}{4 \cdot q \cdot \sin^2 \psi},$$

bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Scheitel A liegt, dessen y-Achse die Symmetrieachse (kurz: Achse) der Parabel und dessen x-Achse die Scheiteltangente bildet. In dieser Gleichung erscheint die Form des Kegels durch den Winkel ψ gegeben, und durch q die Lage der Schnittebene. Setzt man zur Abkürzung $p = 4 \cdot q \cdot \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi}$, so lautet die Parabelgleichung $y = \frac{x^2}{p}$.

Wir legen nun eine Kugel in den Kegel, die diesen längs des waagerechten Kreises w und die Schnittebene im Punkte F berührt. Vom Parabelpunkte P ziehen wir an diese Kugel einmal die in e liegende Tangente PF und sodann die mit der Mantellinie m zusammenfallende Tangente bis zum Kreise w. Diese beiden Tangenten sind gleichlang. Die Länge m von P bis w ist gleich dem Stück aller Mantellinien zwischen den Kreisen w und k, also auch gleich dem Abstande der beiden Punkte U und V auf der rechten Umrißmantellinie. Die Ebene des Berührungskreises w schneidet die Schnittebene e in einer Geraden l, die auf der Aufrißebene senkrecht steht und deren Aufriß somit als Punkt (l') erscheint. In der Bildebene unten rechts erscheint l als Parallele $\bar{l}$ zur Scheiteltangente. Da die Schnittebene e parallel zu einer Umrißmantellinie liegt, sind im Aufriß die Längen zwischen den Punkten U und V, sowie zwischen den Punkten P' und (l') einander gleich. Denken wir uns nun in der Schnittebene vom Parabelpunkte P ein Lot r auf die Gerade l gefällt, so ist die Länge dieses Lotes gleich dem Abstande $P'(l')$ im Aufriß, mithin auch gleich UV und somit gleich der Tangentenlänge $m = PF$.

Es gilt also folgender Satz: Auf der Achse der Parabel gibt es einen Punkt F, ihren sog. *Brennpunkt*, und senkrecht zur Achse, gleichweit vom Scheitel entfernt, eine Gerade l, die sog. *Leitlinie*, derart, daß die Abstände irgendeines Parabelpunktes vom Brennpunkt F und der Leitlinie l einander gleich sind. Daß der Brennpunkt F und die Leitlinie l vom Scheitelpunkte A den gleichen Abstand d haben, zeigt der Aufriß, da dort $A'F' = A'U = A'(l')$ ist. Dem Aufriß kann man noch entnehmen,

daß $d = q \cdot \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} = \frac{p}{4}$ ist.[1]) Wir können also die Parabelgleichung auch $y = \frac{x^2}{4 \cdot d}$ schreiben.[2])

Liegt eine Parabel so im Raume, daß ihre Achse oder Scheiteltangente der Bildebene parallel ist, so ist ihr Bild ebenfalls eine Parabel, deren Scheiteltangente und Achse die Bilder der im Raume liegenden werden. Auch diese ließe sich leicht aus dem Prinzip der Umklappung und der Form der Parabelgleichung ableiten. Daß sich eine beliebig im Raum liegende Parabel als Parabel abbildet, ist schwieriger nachzuweisen.

Um den *Krümmungskreis einer Parabel im Scheitel* zu ermitteln, suchen wir wieder unter allen Kreisen, die eine Parabel im Scheitel berühren, denjenigen aus, der sich ihr dort am engsten anschmiegt.

Die Gleichung eines dieser Berührungskreise ist

$$x^2 + (y_k - r)^2 = r^2,$$

wenn r sein Radius und x, y_k die Koordinaten seiner Punkte sind. Schreibt man diese Kreisgleichung in der Form

$$y_k - r = \pm r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

und bedenkt, daß man nur ein kleines durch den Parabelscheitel A gehendes Stück des Kreises braucht, so erkennt man, daß in dieser Gleichung nur kleine Zahlwerte von $\left(\frac{x}{r}\right)^2$ und das Minuszeichen der Wurzel in Frage kommen. Die Entwicklung der Wurzel gibt dann die Näherungsgleichung

$$y_k - r = -r \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots\right\},$$

die für hinreichend nahe beim Scheitel A liegende Punkte beliebig genau ist. Aus ihr folgt

$$y_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{r} + \cdots$$

Die Parabelgleichung war $y = \frac{x^2}{p}$, und man erkennt, daß derjenige Kreis sich beim Scheitel am engsten an die Parabel anschmiegt, dessen Radius $r = \frac{1}{2} p = 2d$ ist. Dies ist der gesuchte Krümmungskreis.

---

1) $MA' = q \cdot \tan \psi$ und $\sphericalangle A'MF' = \psi$, also $MA' = \frac{d}{\sin \psi}$.

2) Die vorstehenden Entwicklungen sind scheinbar schwerfällig, aber nur so lange, bis man die Abb. 54 nicht mehr als ebene Figur, sondern als Darstellung des im Raume sich wölbenden Kegels, der darauf verlaufenden Parabel usw. aufzufassen gelernt hat.

Bei der *Zeichnung von Punkten einer Parabel* benutzt man Brennpunkt und Leitlinie fast nie. Falls — was die Regel ist — von einer Parabel Scheitelpunkt, Achse und éin Parabelpunkt gegeben sind, so kann man weitere Parabelpunkte schnell durch folgende Konstruktion gewinnen: In Abb. 55 ist A der Scheitel, x Scheiteltangente und y die Achse der Parabel, ferner P ein gegebener Punkt von ihr. Man verbindet nun P mit A und fällt von P auf die Scheiteltangente (d.h. x-Achse unseres Koordinatensystems) ein Lot PL. Zieht man nun von L eine Gerade senkrecht zu AP, so schneidet diese die y-Achse in einem Punkte B und AB ist der Durchmesser des Krümmungskreises.

Ist nämlich $y = \frac{x^2}{p}$ die Gleichung der Parabel, so hat die Gerade AP die Gleichung $y = x \cdot \frac{y_p}{x_p}$, worin x_p und y_p die Koordinaten des Parabelpunktes P bedeuten. Da $y_p = \frac{x_p^2}{p}$ ist, kann man die Gleichung der Geraden AP auch $y = x \cdot \frac{x_p}{p}$ schreiben. Nun ist $AL = x_p$, und die Gleichung der durch L gehenden und zu AP senkrecht stehenden Geraden wird $y = -\frac{p}{x_p}(x - x_p)$. Für $x = 0$ folgt daraus $AB = p$, und das ist (vgl. S. 50) in der Tat das Doppelte des Krümmungsradius. Jetzt zeichnet man den Krümmungskreis, den man ohnehin gebrauchen wird, und findet nun weitere Parabelpunkte, z. B. Q, dadurch, daß man eine Gerade a durch den Scheitel A zieht, und von B ein Lot darauf fällt, wozu einfach B mit dem Schnittpunkt zwischen der Geraden a und dem Krümmungskreise zu verbinden ist. Dieses Lot trifft die x-Achse im Punkte R. Ein in diesem Punkte R auf der x-Achse errichtetes Lot trifft nun die Gerade a in einem Parabelpunkte Q.

Auch die *Tangenten der Parabelpunkte* lassen sich leicht zeichnen, wie es beim Punkte T gezeigt ist. Die Tangente im Punkte T steht nämlich senkrecht auf derjenigen Geraden, die vom Fußpunkte S des von T auf die x-Achse gefällten Lotes nach dem Mittelpunkt K des Krümmungskreises gezogen wird: Die Steigung der Tangente wird bekanntlich aus der Parabelgleichung durch Differentiation nach x gewonnen und ist somit $2\frac{x_t}{p}$, wenn x_t die Abszisse von T ist. Ist K der Mittelpunkt des Krümmungskreises, so ist $AK = \frac{p}{2}$, also $\left|\frac{AK}{AS}\right| = -\frac{p}{2x_t}$, mithin in der Tat SK senkrecht zur Tangente des Punktes T.[1])

1) Vom Scheitel weit entfernte Punkte einer Parabel zeichnet man durch Eintragen ihrer Koordinaten, die man nach Einstellung der Parabelgleichung am Rechenschieber abliest.

Wenn man (für Vollständigkeitsfanatiker) noch erwähnt, daß Ebenen durch die Spitze eines Kegels mit diesem entweder nur diesen Punkt, oder diesen Punkt und ein bis zwei Mantellinien gemeinsam haben, sind alle Möglichkeiten der ebenen Schnitte eines Kegels erledigt.

§ 4. Beispiele.

Abb. 56 zeigt einen runden Turm, der oben durch einen kegelförmigen Helm abgeschlossen ist. In diesen Helm soll ein Erker eingebaut werden, dessen Dachflächen die gleiche Neigung wie die Mantellinien des Helmkegels haben. Alles weitere zeigt die Abbildung.

Zu konstruieren sind die Schnittkurven zwischen dem Helmkegel und den Seiten sowie den Dachflächen des Erkers.

Dessen Giebelwand ist parallel zur Kegelachse und wird aus dem Kegel eine Hyperbel ausschneiden, deren Gestalt das Bild I, die Giebelansicht, zeigt. In der Seitenansicht II sowie im Grundriß erscheint diese Hyperbel als Gerade. Der Ansicht II entnimmt man den Scheitel A der Hyperbel und überträgt ihn in die Ansicht I. Die Umrißmantellinien des Kegels in Ans. I sind die Asymptoten, so daß der Mittelpunkt K des Krümmungskreises bestimmt werden kann. Um noch einen weiteren Punkt der Hyperbel in der Ansicht I zu erhalten, wurde durch die Achse des Kegels und die linke, senkrechte Kante der Giebelfront eine Ebene gelegt, welche aus dem Kegel eine Mantellinie ausschneidet, die im Punkte R auf dem Grundkreise des Kegels aufsetzt. Dieser Punkt R wurde dadurch gefunden, daß man den Grundriß jener Mantellinie durch die als Punkt erscheinende Kante des Giebels zog. Dann wurde die Mantellinie in den Aufriß I übertragen und ihr Schnitt mit der senkrechten Giebelkante und damit der gesuchte Hyperbelpunkt gefunden. Es zeigte sich dabei, daß der Krümmungskreis bereits merklich an diesem Punkte vorbeigeht.

Die Seitenwände des Erkers schneiden ebenfalls Hyperbeln aus dem Helmkegel aus, deren linke die Ansicht II zeigt. Den Scheitel entnimmt man der Ansicht I. Die Asymptoten sind die Umrißmantellinien des Kegels in der Ansicht II. Der Krümmungskreis der Hyperbel nutzt hier nichts, da wir ein Stück der Hyperbel gebrauchen, das vom Scheitel ziemlich entfernt ist. Wir konstruieren daher denjenigen Punkt der Hyperbel, in dem die linke Traufkante des Erkerdaches in den Helmkegel eintritt. Hierzu schneiden wir den Kegel in der Höhe der Traufkanten durch eine waagerechte Ebene in einem Kreise. Sein Radius ist der Ansicht I zu entnehmen und mit diesem Radius wird im Grundriß ein Kreis geschlagen, der den

Grundriß der Traufkante in dem gesuchten Punkte schneidet.[1]) Dem Grundriß kann man jetzt den Abstand d des gesuchten Hyperbelpunktes entnehmen und in die Ansicht II übertragen. Ein zweiter Punkt der Hyperbel ist bereits bekannt; es ist der vorher ermittelte Eintrittspunkt der senkrechten Giebelkante in den Kegel. Einen dritten Hyperbelpunkt, nämlich den, in welchem die Hyperbel den Grundkreis trifft, findet man leicht im Grundriß durch Verlängerung der linken Seitenfläche des Erkers bis zum Schnitt mit dem Grundkreis. Auch der Abstand dieses Punktes von dem gestrichelten Durchmesser wurde in die Ansicht II von der Mittelachse des Turmes nach rechts übertragen. Die Hyperbel ist durch den Scheitel und noch drei Punkte ausreichend bestimmt. Auszuziehen ist von ihr nur das auf der Seitenfläche des Erkers liegende Stück.

Die Dachflächen endlich schneiden den Helmkegel in Parabeln. Ansicht I zeigt den Scheitel B der Parabel, sowie einen Parabelpunkt C auf dem Kegelgrundkreis. Im Grundriß ist eine Parabel zu zeichnen, deren Achse der gestrichelte Kreisdurchmesser, deren Scheitel der Grundriß B^* des Punktes B — des Scheitels im Raume — ist, und von der wir noch den auf dem Grundkreis liegenden Punkt C kennen, so daß die im § 8 angegebene Konstruktion anwendbar wäre. Durch die Eintrittspunkte von Traufkante und First des Erkerdaches, die teils bekannt, teils der Ansicht II entnommen werden, sind jedoch noch zwei Punkte der Parabel gegeben, so daß sich die Zeichnung weiterer Punkte erübrigt. Ansicht II zeigt ein anderes Bild der Parabel, dessen Zeichnung keinen neuen Gedanken mehr erfordert. Auszuziehen sind von den Parabeln nur die auf der Dachfläche liegenden Teile. In Ansicht II berührt die Parabel die Umrißmantellinie in demjenigen Punkt, in dem diese mit dem First zusammentrifft.

Abb. 57 zeigt einen waagerecht liegenden Zylinder, der in seiner Längsrichtung durchbohrt ist. Diese Bohrung wurde nach den Endflächen zu kegelförmig erweitert. Um dies darzustellen, wurde im Aufriß der Zylinder „im Schnitt“ dargestellt, d. h. er wurde durch eine Ebene AB geschnitten, die durch die Zylinderachse geht und die der Aufrißebene parallel angenommen wurde. Der Aufriß zeigt das Bild, das nach Fortnahme des vorderen Halbzylinders erscheint.

Dieser durchbohrte Zylinder wird nun mit einer Ebene s geschnitten, die zur Aufrißebene senkrecht steht und durch die Spitze S_l des linken, die Bohrung erweiternden Kegels geht. Der äußere Zylindermantel des ganzen Körpers wird in einer

1) Von diesem Hilfskreis ist im Grundriß nur ein kleines, die Traufkante schneidendes Stückchen eingezeichnet.

Ellipse geschnitten. Ihr Mittelpunkt ist S_l und ihre kleine Achse gleich dem Durchmesser des Zylinders. Die große Achse besorgt man sich im Aufriß durch Verlängerung von s und den Umrißmantellinien. Durch Übertragung in den Grundriß bekommt man die große Achse der Grundrißellipse. Im Grundriß sind rechts von S_l noch Umrißmantellinien des Zylinders sichtbar, links von S_l dagegen nicht, da nur der unterhalb der Schnittebene übrigbleibende Teil des Körpers dargestellt wird. Die innere zylindrische Bohrung wird ebenfalls in einer Ellipse geschnitten. Diese schließt sich im Grundriß links an die beiden Mantellinien des Kegels an, die aus diesem durch s ausgeschnitten werden. Die kreisförmige Kante zwischen der zylindrischen Bohrung und der kegelförmigen Erweiterung ist im Grundriß teilweise sichtbar.

Der rechte Kegel wird in einer Hyperbel geschnitten, deren Grundrißbild zu zeichnen ist. Im Aufriß ist ein Scheitel durch den Pfeil bezeichnet; den anderen erhält man durch Verlängerung der unteren Umrißmantellinie des Kegels bis zur Schnittebene s. In der Mitte zwischen den Scheiteln liegt der Mittelpunkt der Hyperbel. Die Grundrisse von Mittelpunkt und Scheiteln sind die entsprechenden Punkte der Grundrißhyperbel. Die Asymptoten der in s liegenden Hyperbel haben die Richtung derjenigen beiden Mantellinien, die von einer zu s parallelen und durch die Spitze des rechten Kegels gehenden Ebene ausgeschnitten werden. Der Grundriß dieser Mantellinien gibt die Richtung der Asymptoten der Grundrißhyperbel. Um den Grundriß dieser Mantellinien zu bestimmen, wird die den ganzen Zylinder rechts begrenzende Stirnebene umgeklappt, worauf das Maß 2 nach unten übertragen werden kann. Von dem Grundriß S_r der rechten Kegelspitze ausgehend, ist der Grundriß der hinteren Mantellinie strichpunktiert eingezeichnet und sodann parallel hierzu, sowie symmetrisch zur Achse AB, die Asymptoten. Von der Grundrißhyperbel sind durch Übertragung des Maßes 1 aus der Umklappung noch die beiden Punkte bestimmt, in denen sie die Stirnebene trifft. Unter Benutzung des Krümmungskreises ist die Hyperbel jetzt leicht zu zeichnen. Maß 3 und 4 wurde benutzt, um Ellipsenpunkte auf den Endflächen der betreffenden Zylinder festzulegen.[1])

Abb. 58 zeigt einen keilförmigen Einschnitt in einen Körper, der aus einem Kegel, einem Zylinder und einer Halbkugel zusammengesetzt ist, die alle die gleiche Mittellinie haben. Ansicht I zeigt gestrichelt den Umriß des Körpers vor der Bearbeitung,

---

1) Der Leser variiere die Aufgabe durch Wechsel der Neigung der Schnittebene. Bei hinreichend kleiner Neigung kann die innere Ellipse mit der Hyperbel zusammentreffen.

und Ansicht II den Einschnitt, wie er durch zwei zur senkrechten Mittelebene des Körpers symmetrisch liegende Ebenen begrenzt wird. Der Umriß (in I) und der Grundriß des *bearbeiteten* Körpers sind zu zeichnen.

Beginnen wir mit dem einfachsten Teil der Aufgabe, dem Schnitt des Zylinders in der Mitte. In II ist er durch den Kreis z dargestellt, und man sieht hier die beiden Mantellinien m, in denen er durch die Keilebenen geschnitten wird, als Punkte. Im Grundriß sind außerhalb dieser Mantellinien m noch die Umrißmantellinien des Zylinders sichtbar.

Aus der Halbkugel werden Kreise ausgeschnitten, die in der Ansicht I und im Grundriß als Ellipsen erscheinen. In I und II sind ihre Mittelpunkte hervorgehoben. Zu beachten ist, daß diejenigen Körperpunkte, die in I den Umriß bilden, in II alle auf der senkrechten, strichpunktierten Mittellinie liegen. Unterhalb des Punktes 1 liegen sie im unbearbeiteten Teil des Körpers; deshalb ist in I unterhalb von 1 der Umrißkreis der Halbkugel auszuziehen, in den die Ellipse im Punkte 1 tangential übergeht. Der kleine Strich über 1 bezeichnet den Endpunkt der großen Halbachse der Ellipse, deren Länge gleich dem II zu entnehmenden Radius des Schnittkreises von Kugel und Keilebene ist. Die Endpunkte 2 der kleinen Halbachsen überträgt man von II nach I. Der den Körper im Grundriß begrenzende Umriß besteht aus Punkten, die in der waagerechten Mittelebene des Körpers liegen und die in I und II als die waagerechte, strichpunktierte Mittellinie erscheinen. Unterhalb dieser Mittelebene liegen an sich die im Grundriß unsichtbaren Punkte des Körpers. Nun zeigt aber Ansicht II, daß beim bearbeiteten Körper das Stück der Mittelebene zwischen den Punkten 3 fortgeschnitten ist, folglich sind die Ellipsen im Grundriß bis zum Punkte 1 auszuziehen. Von den Punkten 3 an nach außen ist der Umriß vorhanden.

Der Kegel wird von den Keilebenen in Hyperbeln geschnitten. Einen beliebigen Hyperbelpunkt P kann man erhalten, wenn man den Kegel durch eine Ebene senkrecht zur Mittellinie des Körpers in einem Kreise k schneidet, der in I und II gestrichelt eingezeichnet ist. In II sieht man den Punkt P sofort als Schnitt des Kreises k mit der Keilebene und überträgt ihn nach I. Insbesondere erhält man durch dieses Prinzip auch die Scheitelpunkte der Hyperbel, wenn man in II den Radius eines solchen Kreises a so bemißt, daß er die Keilebene berührt. Sein Berührungspunkt mit der Keilebene ist der Scheitel in Ansicht II. Er wird nach I übertragen, indem man den höchsten Punkt 4 des Hilfskreises a auf die Umrißmantellinie in I überträgt. Scheitel und Hauptachse der beiden (in I sich deckenden) Hyperbeln sind somit festgelegt; der Mittelpunkt M liegt auf der Hauptachse und mit der Kegelspitze in gleicher, zur Kegelachse

senkrechten Ebene. Im Grundriß werden Scheitel, Mittelpunkte und Hauptachsen dadurch gefunden, daß man der Ansicht II ihre Abstände von der senkrechten Mittelebene des Körpers entnimmt. Die (hier nicht eingezeichneten) Asymptoten der Hyperbeln gehen durch die Mittelpunkte M, und ihre Richtungen sind durch diejenigen Mantellinien des Kegels bestimmt, die den Keilebenen parallel laufen. Aus II überträgt man die Hyperbelpunkte 2 nach I und in den Grundriß; ferner den Punkt 1, in dem die Hyperbeln zusammentreffen und in dem sie in der Ansicht I in die Umrißmantellinie tangential übergehen (tangential, weil die Hyperbeln nicht aus dem Umriß heraustreten können). Aus der Ansicht II sind noch die Punkte 3 in den Grundriß übertragen, von denen aus dort die Umrißmantellinien sichtbar werden.[1])

Viertes Kapitel.

Drehkörper. Ihre Schnitte, Durchdringungen und Umrisse.

Drehkörper werden auf der Drehbank hergestellt. Geometrisch können sie dadurch gekennzeichnet werden, daß sie von allen durch eine gewisse Gerade des Körpers — die sog. *Drehachse* — gehenden Ebenen in kongruenten Kurven, den sog. *Meridiankurven* geschnitten werden, und durch Ebenen senkrecht zur Drehachse in Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen. In Bildebenen parallel zur Drehachse begrenzt eine Meridiankurve einen Drehkörper.

§ 1. Durchdringung von Zylindern und Kegeln.

Kugel, Kegel und Zylinder sind die einfachsten Drehkörper, deren ebenen Schnitte bereits erledigt sind. Abb. 59 zeigt nun die *Durchdringung zweier verschieden großer Zylinder*, deren Achsen sich im Punkte S schneiden. Der Zylinder mit dem größeren Durchmesser — kurz der große Zylinder genannt — steht senkrecht auf der Grundrißebene. Die Aufrißebene ist parallel zu beiden Zylinderachsen angenommen. Die Zylinder werden sich in einer Kurve durchsetzen, welche aus zwei Teilen besteht; nämlich den Begrenzungen vom Eintritts- und Austrittsloch, die der kleine Zylinder in den Mantel des großen einschneidet. Acht Punkte der Durchdringungskurve sind schnell gefunden. Durch Pfeile sind die vier Punkte

1) Ich empfehle dem Leser als Variation der Aufgabe, den keilförmigen Ausschnitt so hoch zu legen, daß seine Kante 1 oberhalb der Mittellinie zu liegen kommt.

bezeichnet, in denen obere und untere Mantellinie des kleinen Zylinders in den großen eintreten. Ferner entnimmt man dem Grundriß die Eintrittspunkte 1 und 2 (und die beiden entsprechenden rechts) der Mantellinien m_1 und m_2, die im Grundriß den Umriß des kleinen Zylinders bilden und deren Aufrisse mit dem der Achse des kleinen Zylinders zusammenfallen. Der Aufriß der Durchdringungskurve muß in den Punkten 1, 2 eine senkrechte Tangente haben, denn der Grundriß zeigt, daß rechts von 1 und 2 keine weiteren Punkte des linken Teiles der Durchdringungskurve liegen. Die entsprechenden Punkte des rechten Teiles liegen im Aufriß symmetrisch zu S.

Weitere Punkte vom Aufriß der Durchdringungskurve, z. B. P, findet man nun überraschend einfach dadurch, daß man um den Schnittpunkt S der Zylinderachsen *Hilfskugeln* beschreibt. Eine um einen Punkt der Achse eines Kreiszylinders beschriebene Kugel von hinreichend großem Durchmesser schneidet diesen Zylinder in zwei Kreisen, deren Ebenen zur Zylinderachse senkrecht stehen.[1]) In unserem Aufriß ist nun der Kreis k der Umriß einer solchen Kugel, die aus dem großen Zylinder die Kreise s_1 und s_2 ausschneidet. Diese erscheinen im Aufriß als Gerade, weil die Aufrißebene der Zylinderachse parallel ist. Aus dem kleinen Zylinder schneidet dieselbe Kugel die Kreise t_1 und t_2 aus, die ebenfalls als Gerade erscheinen. Die Schnittpunkte von s_1 und t_1 sowie s_2 und t_2, nämlich P' und Q', sind die Aufrisse von vier Punkten der Durchdringungskurve beider Zylinder. Wer's nicht sieht, schließe so: Die Punkte der Kreise s und t sind Punkte der Zylinderflächen, und da diese Kreise auf einer Kugel liegen, schneiden sie sich, wenn ihre Aufrisse dies tun. Die Schnittpunkte der Kreise s und t sind also Punkte, die zugleich auf beiden Zylindermänteln liegen und somit zur Durchdringungskurve gehören. Unsere Punkte P' und Q' sind Aufrisse von je zwei Punkten der Durchdringungskurve, die hintereinander liegen, wie ja die ganze Kurve spiegelbildlich zu der durch die Zylinderachsen gehenden Ebene ist. Mit diesem „Kugelverfahren" lassen sich also beliebig viele Aufrißpunkte der Durchdringungskurve finden.

Die größte noch brauchbare Hilfskugel geht durch die beiden oben rechts und unten links durch Pfeile bezeichneten Punkte und würde gerade diese Punkte liefern. Die kleinste Hilfskugel, die noch einen Sinn hat, ist diejenige, die den großen Zylinder im Kreise w berührt. Sie liefert die Punkte R' und T', in denen die Tangenten senkrecht zum Aufriß der Achse des kleinen Zylinders stehen; eben — weil sie die kleinste Kugel ist und weil der zugehörige Schnittkreis mit dem kleinen Zylinder der dem

---

1) Der Leser wird sich dies wohl vorstellen können.

Punkte S am nächsten liegende dieser Kreise ist.[1]) Daß übrigens die Aufrisse der beiden Teile der Durchdringungskurve die beiden Äste einer Hyperbel sind, ließe sich unschwer beweisen.

In Abb. 59 ist rechts noch eine weitere Ansicht des großen Zylinders gezeichnet, welche die durch den kleinen Zylinder bewirkte Durchbohrung gut erkennen läßt. Die Punkte P in dieser Ansicht wurden aus dem Grundriß durch Übertragung der bezeichneten Maße gewonnen. Ihre Höhenlage ist die gleiche wie im ersten Aufriß.

Abb. 60a zeigt noch die Durchdringung zweier Zylinder, deren Achsen sich senkrecht schneiden. In diesem Sonderfall ist es leicht zu beweisen, daß der Aufriß der Durchdringungskurve eine Hyperbel ist. Ein räumliches xyz-Koordinatensystem wird so eingeführt, daß seine x-Achse in die Mittellinie des kleinen, seine z-Achse in die des großen Zylinders fällt und somit die y-Achse auf der Aufrißebene senkrecht steht. Die Gleichung des großen Zylinders (Radius: R) ist dann

$$x^2 + y^2 = R^2$$

und die des kleinen Zylinders (Radius: r)

$$z^2 + y^2 = r^2.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung

$$x^2 - z^2 = R^2 - r^2$$

die eine Aussage über die im Aufriß sichtbaren xz-Koordinaten der Punkte beider Zylinder, also der Durchdringungskurve, macht. Es ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten aufeinander senkrecht stehen.[2])

Abb. 60b zeigt einen auf technischen Zeichnungen sehr oft statt der Hyperbel gezeichneten Kreisbogen. Es ist nicht etwa der Krümmungskreis der Hyperbel, sondern der Kreis, der durch die Aufrisse derjenigen drei Punkte der Durchdringungskurve geht, die auf der oberen, unteren und mittleren Mantellinie des

---

1) Es ist ein Zeichen von bedauerlicher Gedankenlosigkeit, wenn mit dem Kugelverfahren schematisch ein Dutzend Punkte konstruiert wird, ohne daß die für die Durchdringungskurve wichtigsten Punkte 1, 2, R', T' darunter sind.

Der Witz bei derartigen Durchdringungen liegt nicht in der Kenntnis und stumpfsinnigen Anwendung eines „Verfahrens", sondern darin, aus der räumlichen Vorstellung der Situation bereits vor dem Beginn der Konstruktion eine so deutliche Vorstellung von den entstehenden Kurven zu bekommen, daß man mit deren wichtigsten Punkten beginnt und weitere nur nach Bedarf hinzufügt.

2) Aus der Abb. 59 könnte man das gleiche bei Benutzung schiefwinkliger Koordinaten fast ebenso schnell ableiten.

kleinen Zylinders liegen. Häufig wird dieser Kreis nur durch eine dünne Linie, wie sie Abb. 60c zeigt, angedeutet. Der Leser vergleiche die drei Bilder. Fraglos wirkt 60a am deutlichsten. Bei 60b hat man den Eindruck, als ob der kleine Zylinder etwas nach vorne gedreht ist.

Sind die Durchmesser der beiden Zylinder einander gleich, so ergibt das Kugelverfahren, wie man an Abb. 61 leicht beweist, als Aufriß ihrer Durchdringungskurve zwei gerade Linien. Sie gehen durch die Schnittpunkte der Umrißmantellinien, sowie den Aufriß des Schnittpunktes der Zylinderachsen und stehen aufeinander senkrecht. Besteht nun aber der Aufriß der Durchdringungskurve aus zwei Geraden, so heißt das, daß deren Punkte in zwei Ebenen liegen, die auf der Aufrißebene senkrecht stehen. Diese Ebenen schneiden aus den Zylindern Ellipsen aus, und wir erkennen somit: *Schneiden sich die Achsen zweier Zylinder von gleichem Durchmesser, so besteht die Durchdringungskurve aus zwei Ellipsen,* deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen. Abb. 61 zeigt noch eine Ansicht des Loches im senkrechten Zylinder, das jetzt allerdings so groß ist, daß der untere Teil dieses Zylinders mit dem oberen nur in zwei Punkten zusammenhängt. In dieser Seitenansicht wurden gleichmäßig über den Zylinderumfang verteilte Mantellinien eingezeichnet, um die Rundung des Zylinders besser hervortreten zu lassen. Abb. 62 zeigt ein mehrfach geknicktes Rohr, wobei beim Zusammenstoßen der einzelnen Stücke Durchdringungsellipsen entsprechend der Abb. 61 auftreten.

Liegen zwei Zylinder so, daß sich ihre Achsen *nicht* schneiden, so ist das Kugelverfahren nicht mehr anwendbar. Man schneidet vielmehr die Zylinder durch zu beiden Achsen parallele Hilfsebenen, die aus den Zylindern je zwei Mantellinien herausschneiden, deren Schnittpunkte zur Durchdringungskurve gehören, von der somit auch in diesem Falle beliebig viele Punkte konstruiert werden können. Das Kugelverfahren ist dagegen anwendbar bei beliebigen Drehflächen, wenn ihre Achsen sich schneiden und die Aufrißebene diesen parallel angenommen wurde.

Als Beispiel für die *Durchdringung von zwei Zylindern, sowie von Kegel und Zylinder, deren Achsen sich nicht schneiden,* zeigt Abb. 63 einen auf der Grundrißebene senkrecht stehenden Zylinder, in den eine Aushöhlung so eingeschnitten wurde, daß ein waagerechter Zylinder mit angesetztem Kegel hineinpaßt. Der Grundriß zeigt mit dünnen Linien den Umriß dieses Körpers. Die Kontur der Höhlung im senkrechten Zylinder ist im Aufriß zu zeichnen. Um den zum waagerechten Zylinder gehörenden Teil zu zeichnen, benutzen wir *Hilfsebenen* parallel der Aufrißebene, die im Grundriß als Gerade erscheinen. Es wäre nun recht zeit-

raubend, diese Hilfsebenen ohne Überlegung zu wählen, und hier zeigt sich wieder der Vorteil, wenn der Zeichner vor dem Beginn seiner Konstruktion die Situation innerlich bereits vor Augen hat. Man kommt dann mit recht wenig Hilfsebenen aus.

Die höchste Mantellinie des waagerechten Zylinders trifft den senkrechten im Punkte 1; im Aufriß wird die Kontur den gestrichelten Umriß des waagerechten Zylinders in diesem Punkte berühren. Durch die am weitesten rechts stehende Mantellinie des senkrechten Zylinders wird nun eine Hilfsebene parallel zur Aufrißebene gelegt. Sie schneidet aus dem waagerechten Zylinder eine Mantellinie aus, deren Höhe z_2 die im Grundriß vorgenommene Umklappung seiner Stirnebene abgreifen und in den Aufriß über seine (strichpunktierte) Mittellinie auftragen läßt. Damit ist oben der Punkt 2 gefunden, in dem, die Kontur berührend, die rechte Mantellinie des senkrechten Zylinders den waagerechten trifft. Unterhalb 2 ist diese Mantellinie fortgeschnitten.

Punkt 3 der Kontur liegt in der Höhe der Achse des waagerechten Zylinders und wird aus dessen hinterer Umrißmantellinie im Grundriß gewonnen. Als letzte zur Aufrißebene parallele Hilfsebene wurde diejenige genommen, die den senkrechten Zylinder in seiner vorderen Mantellinie berührt, und damit der Punkt 4 der Kontur bestimmt. Aus Symmetriegründen muß die Kontur in diesem Punkte waagerecht verlaufen.

Irgendeinen Punkt, z. B. 5 der Kontur des *kegeligen* Teiles, finden wir durch andere, ebenfalls senkrechte Hilfsebenen, die jetzt aber alle durch die Spitze des Kegels gelegt werden. Die von einer solchen Hilfsebene aus dem Kegel ausgeschnittene Mantellinie trifft den Kreis, in dem waagerechter Zylinder und Kegel zusammenstoßen, in einem Punkte 6, dessen Höhe z_6 wieder der umgeklappten Stirnfläche zu entnehmen ist. Dadurch kann diese Mantellinie in den Aufriß übertragen werden. Sie trifft den senkrechten Zylinder im Punkte 5, der aus dem Grundriß auf den Aufriß der Mantellinie zu übertragen ist.

Eine Grenzlage dieser Hilfsebenen durch die Spitze des Kegels — deren eine den Punkt 5 lieferte — ist diejenige, in der sie den senkrechten Zylinder berührt. Der Aufriß der zu dieser Lage gehörenden Kegelmantellinie ist Tangente im Punkte 7 der Kontur, den diese Hilfsebene, ebenso wie vorher, konstruieren läßt.

Geht die Hilfsebene durch die Achse des Kegels, so liefert sie den Punkt 8, dessen Tangente der Kegelumriß ist. Die hintere waagerechte Mantellinie des Kegels trifft den senkrechten Zylinder im Punkte 9, dessen Aufriß auf der Mittellinie liegt. Es ist der am weitesten links liegende Punkt der Kontur und seine Tangente daher senkrecht. In dem schon vorhandenen Punkte 4 geht der zum Kegel gehörende Teil der Kontur in den zum Zy-

linder gehörenden mit einem Knick über, weil Kegel und Zylinder in einer Kante aneinander stoßen. Im Aufriß ist diese Kante in der Aushöhlung teilweise sichtbar. Die untere Hälfte der Kontur ist symmetrisch in bezug auf die Mittellinie, da die Achse von Kegel und Zylinder waagerecht liegt. Die linke Umrißlinie des senkrechten Zylinders bleibt, wie der Grundriß zeigt, ganz erhalten.

Abb. 64 zeigt einen (halben) *Kegelstumpf*, der parallel zu seiner Achse *durchbohrt* wurde, und zwar zweimal, um zwei Ansichten einer solchen Bohrung darzustellen. Um einen beliebigen Punkt der Durchdringungskurve zu erhalten[1]), schneidet man Kegel und Zylinder durch eine *waagerechte Hilfsebene* in Kreisen, die im Aufriß als waagerechte Gerade erscheinen. Die Kreise auf den Zylindern haben die Grundkreise der Zylinder zum Grundriß, während der Radius des aus dem Kegel ausgeschnittenen Kreises dem Aufriß zu entnehmen ist. So erhält man die Grundrisse $P^*Q^*R^*$ von Punkten der Durchdringungskurven und danach die Aufrisse $P'Q'R'$ in Höhe der Hilfsebene.

Um im Aufriß die ganz rechts und links liegenden Punkte der Durchdringungskurve des vorderen Zylinders zu erhalten, wählt man die Höhenlage der Hilfsebene so, daß ihr Schnittkreis k mit dem Kegel den Zylinder gerade in den Mantellinien ganz rechts und links trifft, wobei man vom Grundriß auszugehen hat. Die Kontur im Aufriß hat in diesen Punkten senkrechte Tangenten. Ähnlich findet man den höchsten und tiefsten Punkt der Kurve, zu denen waagerechte Tangenten gehören, indem man im Grundriß Kreise durch die vorderste und hinterste Mantellinie des Zylinders legt, deren Radien die Höhe der zugehörigen Hilfsebene bestimmen.[2])

Diese Methode der waagerechten Hilfsebenen wird ungenau bei Kurvenpunkten, die in der Nähe der zuletzt erhaltenen liegen, da die dabei benutzten Hilfskreise im Grundriß mit den Grundkreisen der Zylinder schlechte Schnitte geben. Man benutzt daher noch *andere (senkrechte) Hilfsebenen*, die durch die Achse des Kegels gehen und aus ihm Mantellinien ausschneiden. Eine solche Mantellinie ist m und liefert den Punkt S (und Q noch einmal). Die Grundrisse S^* und Q^* sind dabei gerade bei solchen Punkten genau bestimmt, wo die erste Methode versagte. Die Aufrisse müssen jedoch nach der ersten Methode gewonnen werden, da ein einfaches Herauf loten von S^* nach S' auf m' wieder schlechte Schnitte ergäbe. Nach der zweiten Methode wird man vor allem den Punkt T (und die anderen gleichhoch

---

1) D. h. um die Konstruktionsmethode der Durchdringungskurve zu erklären.

2) Diese Hilfslinien sind in Abb. 64 nicht eingezeichnet.

liegenden) bestimmen, da die zugehörigen Mantellinien im Aufriß Tangenten werden.

In Abb. 64 a ist noch die *Abwicklung* des Sektors AB der Kegelmantelfläche gezeichnet, mit der in diesem Sektor liegenden Durchdringungskurve.

Um einen Punkt M sind zwei Kreise geschlagen, deren Radien die dem Aufriß zu entnehmenden Längen der Mantellinien bis zur Deckel- und Bodenfläche des Kegelstumpfes sind. Die Länge des Grundkreisbogens AB muß im Grundriß und in der Abwicklung die gleiche sein, daher muß

$$\sphericalangle AMB = \frac{A^*M^*}{AM} \cdot \sphericalangle A^*M^*B^*$$

sein, wobei die Winkel im Gradmaß gemessen werden können (Rechenschieber!). Einen beliebigen Punkt Q überträgt man in die Abwicklung, indem man im Grundriß den Winkel α mißt, sodann $\beta = \frac{A^*M^*}{AM} \cdot \alpha$ am Rechenschieber abliest und die Mantellinie durch Q in die Abwicklung einzeichnet. Das Stück MQ der Mantellinie mißt man im Aufriß als $M'Q^0$ auf der Umrißmantellinie, auf der Q^0 ein mit Q in gleicher Höhe liegender Punkt ist.[1]

§ 2. Schnitte und Durchbohrungen beliebiger Drehkörper.

Abb. 65 zeigt *ebene Schnitte eines Drehkörpers* bestehend aus einer Halbkugel, einem Zylinder und einem Schaft, der, sich nach oben verjüngend, in einen Zylinder übergeht.

Die erste Schnittebene a ist der Drehachse parallel und senkrecht zur Aufrißebene. Ansicht I zeigt die entstehende Schnittfigur. Sie besteht aus einem Halbkreis als Schnitt mit der Kugel, zwei Schnittgeraden mit dem Zylinder, deren Abstand dem Grundriß zu entnehmen ist, und der Schnittlinie auf dem Schaft. Den höchsten Punkt von dieser überträgt man aus dem Aufriß und konstruiert andere Punkte durch waagerechte Hilfsebenen, z. B. w, die den Drehkörper in Kreisen schneiden.[2]

Je näher die Schnittebene a der Drehachse liegt, um so höher liegt der höchste Punkt der Kurve. Ist der Abstand kleiner als der Radius des Schaftzylinders, so hat die Kurve keinen höchsten Punkt, sondern geht nach oben in zwei Parallele zur Drehachse über. Berührt die Schnittebene diesen Zylinder, so zeigt die Kurve oben eine Spitze.[3]

---

1) $M'Q'$ ist ja nicht die wahre Länge des Stückes MQ, da dies nicht parallel zur Aufrißebene liegt!

2) Bei der Bearbeitung von Pleuelstangenköpfen tritt diese Schnittkurve auf.

3) Es ist sehr zu empfehlen, die Beispiele in derartiger Weise zu variieren.

Die Bilder der Schnittkurve mit einer geneigten Schnittebene *b* zeigen Grundriß und Ansicht II. Die Schnittkurve selbst besteht unten aus einem Kreisbogen 2 1 2, der in den Punkten 2 glatt in Ellipsenbögen übergeht; diese schließen sich in den Punkten 3 mit einem Knick an die Schnittkurve mit dem Schaft an. Den Mittelpunkt des Kreisbogens liefert das vom Mittelpunkt der Kugel auf die Schnittebene gefällte Lot; der Mittelpunkt der Ellipse ist der Schnittpunkt der Ebene *b* mit der Drehachse. Die Hauptachsen der zum Kreisbogen und den Ellipsenstücken gehörenden Bildellipsen entnehmen wir in bekannter Weise dem Aufriß. Die Bilder der Schnittkurve auf dem Schaft sind punktweise zu konstruieren. Den höchsten Punkt 5 überträgt man aus dem Aufriß in den Grundriß und die Ansicht II. Die Punkte 3 zuerst in den Grundriß und von da nach II. Die übrigen Punkte findet man durch waagerechte Hilfsebenen, deren eine (*w*) gestrichelt eingezeichnet wurde.

Den Punkt 4 der Schnittkurve, der gerade vor der Drehachse liegt, wird man dabei deshalb bevorzugen, weil er in der Ansicht II denjenigen Punkt bezeichnet, bis zu dem von unten der Umriß des Drehkörpers sichtbar bleibt. Im Grundriß ist 1 2 ein Ellipsenbogen; 2 3 und weiter der Grundkreis des Zylinders. In Ansicht II ist 2 1 2 das Bild des Kreisbogens auf der Halbkugel; während 2 3 die Ansicht der Schnittellipse auf dem Zylinder ist. Die im Grund- und Aufriß, sowie in der Ansicht II stark ausgezogenen Linien stellen den Körper dar, der aus dem Drehkörper durch die Schnittebenen *a* und *b* ausgeschnitten wurde.

Der Leser muß in der Ansicht II das Innere der Kurve 1 2 3 4 5 als ebene Fläche, ferner die Wölbung von Zylinder und Kugel deutlich vor sich sehen; sowie auch in den Zwickeln zwischen Umriß und der Schnittkurve die gewölbte Fläche des Schaftes, die dort noch sichtbar ist. Das gleichzeitige Betrachten von Aufriß und Ansicht II verhilft zu dieser plastischen Wirkung.

Abb. 66 zeigt den gleichen Drehkörper mit verschiedenen *Bohrungen.*[1]) Die erste Bohrung geht parallel zur Drehachse und liegt vor dieser. Ihre Kontur im Aufriß wurde in bekannter Weise durch waagerechte Hilfsebenen gewonnen (vgl. Abb. 64).

Der Drehkörper wurde ferner in waagerechter Richtung von links her angebohrt. Auch hier liefern waagerechte Hilfsebenen die Konturen des Bohrloches in Grund- und Aufriß. Eine solche Hilfsebene schneidet den Drehkörper in einem Kreise, dessen

---

1) Die Kreislinie, welche die Halbkugel vom Zylinder abgrenzt, und die rein geometrisch gar nicht als Kante existiert, wurde absichtlich in Abb. 65 eingezeichnet und in Abb. 66 nicht. Fraglos ist Abb. 65 in dieser Beziehung deutlicher.

Grund- und Aufriß gestrichelt wurde. Den waagerechten Bohrzylinder schneidet sie in zwei Mantellinien. Um deren Abstand von der senkrechten Mittelebene des Bohrzylinders zu bekommen, wurde die Stirnfläche des Zylinders im Aufriß umgeklappt und dieser Abstand in der Umklappung durch einen Maßpfeil bezeichnet. Überträgt man dieses Maß in den Grundriß, so erhält man die Grundrisse jener Mantellinien und durch ihre Schnittpunkte mit dem Hilfskreise Grundrißpunkte der Kontur. Diese sind dann in den Aufriß der Mantellinien (oder des Hilfskreises) hinaufzuloten.

Selbstverständlich beginnt man die Konstruktion dieser Kontur mit der Ermittelung des höchsten und tiefsten Punktes mittels der höchsten und tiefsten Zylindermantellinie. Sodann bestimmt man durch die beiden Mantellinien in Höhe der Zylinderachse und dem entsprechenden Hilfskreis den vordersten und hintersten Punkt. Die beiden am weitesten rechts liegenden Punkte der Kontur können nicht direkt gefunden werden, da ihre Lage von der mathematisch nicht fixierten Form des Schaftes abhängt.

Rechts wurde der Drehkörper zunächst ebenfalls parallel zur Drehachse durchbohrt. Diese Bohrung ist durch zwei, den Bohrzylinder berührende und der Aufrißebene parallele Ebenen nach außen zu einer offenen Höhlung erweitert. Im Aufriß besteht (rechts) der Umriß des bearbeiteten Körpers von unten angefangen aus folgenden Kurven: Umrißkreis bis zur Bohrung; Aufriß der Durchdringungskurve von Kugel und Zylinder (dieser Aufriß ist eine Parabel!); ein Kreisbogen, als Schnitt dieser Ebenen mit der Kugel (von dem kleinen Strich an, der den Übergang in die beiden die Bohrung erweiternden Ebenen anzeigt); eine Gerade, als Schnitt mit dem Zylinder; ein Stück Schnittkurve von Schaft und Ebene (entsprechend Abb. 65, I); endlich die Seitenansicht eines zur Drehachse parallelen Bohrloches.

Noch eine zeichentechnische Bemerkung zu den Abb. 64, 65 und 66: Es treten hier zahlreiche Kurven auf, die eine Symmetrieachse besitzen, und an ihren Schnittpunkten mit dieser wird man gern die *Krümmungskreise* haben wollen. Man zeichnet dazu die Kurven in Blei recht genau, wozu man allerdings nicht wenige Hilfsebenen braucht, solange die Kurvenform noch unbekannt ist. Dann sucht man *durch Probieren* den Kreis zu finden, der sich am besten anschmiegt und benutzt von ihm beim Ausziehen ein Stückchen für die Kurve in der Nähe der Symmetrieachse, wobei die Bleizeichnung erkennen läßt, wie weit. Diese Anweisung erscheint unmathematisch, ist aber praktisch.

Abb. 67 zeigt einen waagerecht liegenden *spindelförmigen Drehkörper*, in den eine *Nut gefräst* wird. Der Umriß des Körpers besteht übrigens aus zwei Kreisbögen. Der Fräser

(Aufriß II) ist ein Kegelstumpf und sein Profil ein Trapez; seine Drehachse senkrecht. Seine Bewegungsrichtung ist im Grundriß durch einen Pfeil bezeichnet. Die Achse des Drehkörpers ist in den Ansichten II, III strichpunktiert eingezeichnet. Aus II sieht man, daß der Fräser oberhalb dieser Achse bleibt, so daß im Grundriß der ganze Umriß der Drehfläche sichtbar ist.

Ein beliebiger Punkt P der Kontur der Ausfräsung wird durch eine Hilfsebene gefunden, die zur Drehachse senkrecht steht und aus dem Drehkörper einen Kreis k ausschneidet, der im Grund- und Aufriß I dünn ausgezogen ist. Die Seitenfläche s des vom Kegel des Fräsers bei seiner Arbeit durchfahrenen dreikantigen Raumprismas wird von der Hilfsebene in einer Geraden g geschnitten. Um diese im Grund- und Aufriß zu zeichnen, ermitteln wir zwei Punkte R und S von ihr. Wir verfolgen zunächst die Kante r des Fräserprismas, in der die Seitenebene s mit der Bodenebene b zusammenstößt (s. Aufriß II). Im Punkte R trifft, wie der Grundriß zeigt, diese Kante r die Hilfsebene. Die Bodenebene b erscheint im Aufriß I als waagerechte Linie, auf welcher der Aufriß R' dieses Durchstoßpunktes liegen muß. Damit ist der erste Punkt zur Bestimmung der Geraden g gefunden. Einen zweiten Punkt S finden wir auf der oberen Kante t des Prismas. Der Grundriß zeigt ihren Treffpunkt S mit der Hilfsebene. Im Aufriß I liegt t' waagerecht und in einer Höhe über b, die dem Aufriß II zu entnehmen ist. Nachdem von S^* nach S' auf t' hinaufgelotet ist, kann der Aufriß g' der Schnittgeraden gezeichnet werden.[1]) Der Schnitt von g' und k' ist der Aufriß P' eines Punktes der Kontur; sein Grundriß P^* liegt auf k^*. So können durch Parallelverschiebung der Hilfsebene beliebig viele Punkte der Kontur gezeichnet werden. Was übrigens recht schnell geht, da die Aufrisse aller Schnittgeraden zu g' parallel sind, so daß sie nur durch éinen Punkt bestimmt zu werden brauchen. Jede Hilfsebene liefert auch einen Punkt Q desjenigen Teils der Kontur, der vom Boden b des Fräsers in den Drehkörper geschnitten wird. Der Aufriß Q' ist nämlich der Schnitt des Hilfskreises k' mit b.[2])

Der Punkt U der Kontur, der senkrecht über der Drehachse liegt, wurde noch besonders bestimmt. Es wurde ein Aufriß III parallel zur Drehachse eingeführt, in dem der Umriß des Drehkörpers durch eine Meridiankurve (Kreisbogen) gebildet wird. Legt man durch die Drehachse eine senkrechte Ebene, so schneidet diese aus der zweiten Seitenfläche p des Fräserprismas eine Gerade q aus, deren Grundriß mit dem der Drehachse zu-

---

1) Wo liegt ihr Grundriß?

2) Die Teile der Kontur, auf der die Punkte Q liegen, sind keine Kreise!

sammenfällt. Die Oberkante t des Fräserprismas wird von q in einem Punkte T geschnitten, dessen Aufriß T''' in III ebensoweit von der Drehachse abliegt, wie t'' und T'' in II. Denkt man sich nun die Seitenebene p des Fräserprismas bis zur waagerechten Mittelebene der Drehfläche vergrößert, so erhält man eine Schnittgerade w, welche die Drehachse im Punkte W schneidet. Der Aufriß W''' dieses Punktes in III ist mit T''' zu verbinden, wodurch man den Aufriß q''' erhält. Der Schnitt von q''' mit dem Umriß gibt den Aufriß U''' desjenigen Punktes U, der über der Drehachse liegt. Die Tangente im Punkte U ist der Verschiebungsrichtung des Fräsers parallel.

Der Leser wird bemerkt haben, daß es bei Schnitten und Durchdringungen von Drehflächen stets darauf ankommt, diese durch Hilfsebenen oder Hilfskugeln in Kreisen zu schneiden, und die Durchdringungspunkte dieser Kreise — die sich in einer zur Drehachse senkrechten Bildebene leicht zeichnen lassen — aufzusuchen.

§ 3. Der Umriß von Drehkörpern.

Zu recht interessanten Untersuchungen führt die anscheinend so einfache Frage nach dem Umriß einer Drehfläche, wenn deren Drehachse zur Bildebene nicht parallel oder senkrecht, sondern geneigt ist.

Als erstes Beispiel zeigt Abb. 68 eine Drehfläche, die aus Halbkugel, Zylinder und Kegel zusammengesetzt ist. Ihre Drehachse liegt der Aufrißebene parallel, so daß dort ihr Umriß bekannt ist. Wie sieht er jedoch im Grundriß aus?

Den Umriß irgendeines Körpers erhält man ganz allgemein durch folgende Konstruktion: Man stelle sich einen dünnen, geraden, steifen Draht im Raume beweglich vor. Dieser Draht, d. h. eine Gerade, die wir das *Umrißlot* nennen wollen, soll nun so geführt werden, daß sie stets senkrecht zur Bildebene bleibt und den Drehkörper berührt. Läßt man das Umrißlot am Körper entlang gleiten, so beschreibt sein Fußpunkt in der Bildebene den Umriß des Körpers.[1])

Diejenige Kurve auf dem Körper, welche durch die Berührungspunkte des Umrißlotes gebildet wird, wollen wir die *Grenzkurve* nennen. Sie teilt nämlich die Oberfläche des Drehkörpers derart ein, daß Oberflächenteile (und auf ihnen gezeichnete Punkte oder Linien,) die auf der einen Seite der Grenzkurve liegen, im Bilde sichtbar sind, während die auf der anderen Seite der Grenzkurve liegenden unsichtbar bleiben.

---

1) Der so entstehende Umriß kann auch als Schatten gedeutet werden, der vom Körper auf die Bildebene geworfen wird, wenn Lichtstrahlen auf ihn fallen, die zur Bildebene senkrecht sind.

Bei unserer Drehfläche der Abb. 68 lassen wir die Gleitbewegung des Umrißlots rechts bei der Kugel beginnen, wo es die Kugel im Punkte 1 berührt. Beim Weitergleiten berührt das Umrißlot die Kugel in Punkten des waagerechten Äquators bis 2.[1]) Der halbe Äquator 2 1 2 ist also Grenzkurve. Beim Zylinder bilden die vor und hinter seiner Achse liegenden Mantellinien die Grenzkurve von 2 bis 3. Der Umriß unten besteht also aus dem Halbkreise 2 1 2 und den Geraden 2 3 parallel zum Grundriß der Drehachse.

Beim Kegel ist die Sache nicht so einfach und es ist ein *beliebter Fehler,* die Mantellinie 5 3 als Grenzkurve anzusehen. Gewiß gehört die Kegelspitze 5 zur Grenzkurve, aber welche Mantellinien? Wir bestimmen diese nach *zwei Methoden.*

Erstens: Die zum Kegel gehörenden Umrißlote bilden zwei senkrechte Ebenen, die sich in einer durch die Spitze 5 gehenden, ebenfalls senkrechten Geraden schneiden.[2]) Die Spurlinien dieser beiden senkrechten Ebenen bilden den Umriß des Kegels, weil sie ja alle Umrißlote enthalten. Wir bilden jetzt den Grundkreis des Kegels, d. h. die Kante zwischen Kegel und Zylinder, im Grundriß als Ellipse ab. Sie wird von den vorerwähnten Spurlinien jener senkrechten Berührungsebenen berührt, denn der Grundkreis wird ja auch im Raume von diesen beiden Ebenen berührt und zwar in den Punkten 4. Um diese zu finden, vergrößern wir die Ebene des Grundkreises soweit, daß sie von der senkrechten Geraden durch die Kegelspitze 5 im Punkte D durchstoßen wird. Ziehen wir nun, in der Ebene des Grundkreises, von D zwei Tangenten an diesen, so sind 4 die Berührungspunkte.

Dies können wir in einer neuen Bildebene verfolgen, die wir senkrecht zur Drehachse einführen und umklappen, womit wir die gesuchte Ansicht der Grundkreisebene erhalten. In der Umklappung dieser Bildebene erscheint der Grundkreis als Kreis; der Punkt $\bar{4}$ wird durch die von $\bar{D}$ (Bild von D) gezogene Tangente bestimmt und kann in den Aufriß übertragen werden.

Der Grundriß des Punktes 4 muß auf der Bildellipse des Grundkreises liegen. Wir können aber auch in der Umklappung den Abstand des Punktes 4 von der senkrechten Mittelebene des Drehkörpers messen und in den Grundriß übertragen, wenn wir unsere Ellipse nicht für genau genug halten.

Zum Umriß gehören also die Tangenten 54, die vom Grundriß der Kegelspitze an die Bildellipse des Kegelgrundkreises gezogen

1) Auf der Vor- und Rückseite des Drehkörpers geschieht das gleiche!

2) Wer ein Kegelmodell zur Hand hat, möge ein aufgeschlagenes Buch senkrecht auf den Tisch stellen und den geneigt gehaltenen Kegel hineinpassen.

werden; die zugehörigen Stücke der Grenzkurve auf dem Kegel sind die Mantellinien 5 4. Das noch fehlende Stück der Grenzkurve des Drehkörpers ist der Bogen 3 4 des Grundkreises, an dem man sich das Umrißlot an der Kante entlanggleitend leicht vorstellen kann.

Im Grundriß ist die Grundkreisellipse nur bis zu den beiden Punkten 3 auszuziehen, da der Grundkreis in diesen Punkten auf die andere Seite der Grenzkurve übergeht, wie der Aufriß zeigt.[1])

Die *zweite Methode* zur Ermittlung des Umrisses eines Kegels ist vielleicht einfacher. Sie wird uns auch bei anderen Aufgaben noch oft begegnen: Wir legen eine Kugel in den Kegel, die ihn längs des punktierten Kreises berührt. Der Umriß dieser Kugel ist der im Grundriß gestrichelte Kreis und würde durch ein die Kugel umkreisendes Umrißlot erhalten werden. Die Grenzkurve der Kugel ist der gestrichelte Äquator. Dieser Äquator berührt den Kegel in den beiden Punkten, in denen er mit dem punktierten Berührungskreise zusammentrifft. In diesen Punkten berührt auch das die Kugel umkreisende Umrißlot den Kegel; in diesen Punkten ist es also Umrißlot sowohl der Kugel als auch des Kegels. Die Schnittpunkte des gestrichelten Äquators mit dem punktierten Berührungskreise sind demnach Punkte der Grenzkurve. Im Grundriß liegen diese (dunklen) Punkte auf dem gestrichelten Kreise und sind Punkte des Umrisses. Ihre Verbindungsgeraden mit 5 bilden den Umriß des Kegels. Denkt man sich nämlich bei unserem Beispiel dieses zweite Verfahren noch mit anderen Kugeln durchgeführt und jedesmal die gleichen Hilfslinien gezeichnet, so entstehen Figuren, die einander ähnlich sind und in bezug auf die Kegelspitze 5 auch ähnlich liegen. Dies gilt für den Raum ebenso wie für den Grundriß. In diesem entstehen gestrichelte Kreise, die sämtlich die Tangenten 5 4 berühren.

Wird die Drehachse dieses Körpers hinreichend steil aufgerichtet, so kann die Kegelspitze im Grundriß unsichtbar werden. Die beiden Geraden 5 4 fallen dann beim Umriß fort.

Eine *Anwendung dieser Kugelmethode* der Umrißbestimmung wird in Abb. 69 beim Umriß eines Drehkörpers gemacht, der

---

1) Ich gebe gern zu, daß es bei der Zeichnung des Umrisses meistens genügen würde, die Tangenten 5 4 vom Punkte 5 einfach an die Ellipse des Grundkreises zu legen, ohne erst den Punkt 4 im Aufriß durch Umklappung zu konstruieren. Ich habe diese Konstruktion auch nicht etwa dem Prinzip zuliebe herangezogen: „Wozu etwas einfach machen, wenn es auch kompliziert geht?“ Sondern deshalb, weil ihre räumliche Auffassung nicht ganz so einfach und deshalb recht wirksam für die Ausbildung der Raumanschauung ist. Überdies ist der Verlauf 1 2 3 4 5 der Grenzkurve im Aufriß doch recht überraschend.

durch Umdrehung einer Parabel um ihre Achse entsteht und der daher Rotationsparaboloid heißt. Sein Umriß in der Grundrißebene ist zu zeichnen.

Wir benutzen Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen und die die Drehfläche berühren. M ist der Mittelpunkt einer solchen Kugel. Die punktierte Linie im Aufriß stellt den Berührungskreis dar; der waagerechte Äquatorkreis der Kugel ist gestrichelt. Die (dunklen) Schnittpunkte beider Kreise sind Punkte der Grenzkurve und ihre Grundrisse daher Punkte des Umrisses. Die Zeichnung der Umrißkurve ist einfacher als die Theorie erwarten läßt: Man nimmt hinreichend dicht liegende Punkte M auf der Drehachse an und bestimmt im Aufriß den Radius von Kreisen um M' so, daß die Meridiankurve berührt wird. Mit diesen Radien schlägt man im Grundriß Kreise um die Grundrisse M^*. Die gesuchte Umrißkurve umhüllt diese Kreise und ist mit dem Kurvenlineal leicht zu zeichnen. Auf die Zeichnung der Grenzkurve verzichtet man dabei, sofern es nur auf den Umriß ankommt.

Wir wollen jedoch die *Grenzkurve* zur Abwechslung einmal *berechnen,* um zu zeigen, wie durchsichtig Formeln werden können, wenn man die Anschauung räumlicher Dinge damit verbindet.

Wir richten ein xyz-Koordinatensystem so ein, daß seine x-Achse in die Drehachse fällt und sein Nullpunkt N in den Scheitel der Meridianparabeln, d. h. in den Durchstoßpunkt der Drehachse durch die Drehfläche. Die z-Achse ist parallel und die y-Achse senkrecht zur Aufrißebene. Die Gleichung der Drehfläche ist dann:

$$x = \frac{y^2 + z^2}{p}, \tag{1}$$

worin p die Konstante der Meridianparabel und damit des ganzen Paraboloids ist (vgl. S. 49). Nun führen wir eine Kugel vom Radius r ein, deren Mittelpunkt M auf der Drehachse im Abstande a von N liegt. Die Gleichung dieser Kugel ist

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{2}$$

Wir verfolgen nun die im Aufriß durchgeführte geometrische Konstruktion durch die Rechnung. Setzen wir in den beiden Gleichungen $y \equiv 0$, so erhalten wir solche, die nur über den Aufriß der Raumpunkte etwas aussagen:

(3) $\quad x = \dfrac{z^2}{p}$ (Die Meridianparabel, die der Aufriß zeigt),

(4) $\quad (x - a)^2 + z^2 = r^2$ (Der Umrißkreis der Kugel).

Der Radius r ist nun so zu bemessen, daß die Kugel die Dreh-

fläche berührt; dies wird erreicht, wenn im Aufriß der Umrißkreis der Kugel die Meridianparabel berührt.

Wir multiplizieren die Gl. (3) mit p und ziehen sie von Gl. (4) ab. Dabei fällt z^2 heraus und es entsteht die Gleichung

$$x^2 - x \cdot (2a - p) - r^2 + a^2 = 0. \tag{5}$$

Diese in x quadratische Gleichung würde durch ihre Auflösung:

$$x_{1,2} = \frac{2a - p}{2} \pm \sqrt{\frac{(2a - p)^2 + 4 \cdot (r^2 - a^2)}{4}} \tag{6}$$

bei einem beliebigen Kugelradius r die beiden Abszissen x_1 und x_2 der (vier) Schnittpunkte vom Kugelumrißkreis mit der Meridianparabel angeben.

Soll aber, wie wir es wollen, die Kugel die Drehfläche berühren, so muß r so bemessen werden, daß statt der vier Schnittpunkte nur zwei Berührungspunkte von Kugelkreis und Parabel erscheinen. Diese bekommen die gleiche Abszisse; r muß daher so gewählt werden, daß der Radikand der Wurzel Null wird. Hat r nun diesen Wert, den wir nicht etwa auszurechnen brauchen, so bekommen die Berührungspunkte die gemeinsame Abszisse

$$\bar{x} = \frac{2a - p}{2}. \tag{7}$$

Der Umriß unseres Drehkörpers hängt nun sicher vom Neigungswinkel α seiner Drehachse ab, der also in die Rechnung hereingebracht werden muß.

Wir brauchen dabei nur unserer geometrischen Konstruktion im Aufriß zu folgen:

Die Berechnung von $\bar{x}$ nach Gl. (7) entspricht dem Einzeichnen des punktierten Berührungskreises. Darauf wurde gestrichelt durch M' der waagerechte Äquator als Gerade eingezeichnet. Diese waagerechte Gerade hat im xz-System des Aufrisses die Gleichung

$$z = (a - x) \cdot \tan \alpha. \tag{8}$$

Setzen wir für x hier die Abszisse $\bar{x} = \frac{2a - p}{2}$ des Berührungspunktes ein, so erhalten wir die Ordinate $\bar{z}$ des gesuchten Punktes der Grenzkurve, denn alle Punkte des punktierten Aufrisses des Berührungskreises haben ja dieselbe Abszisse $\bar{x}$.

Jetzt kommt die Pointe!

Durch Einsetzen von $\bar{x}$ in Gl. (8) erhalten wir

$$\bar{z} = \frac{p}{2} \cdot \tan \alpha. \tag{9}$$

Es ist also z von a unabhängig! Nun bestimmt a die Lage der Hilfskugel, p das Paraboloid und α die Neigung seiner Achse.

Der Wert $\bar{z}$ kommt also bei allen Hilfskugeln gleich heraus, und der Aufriß der Grenzkurve ist eine Parallele zu dem der Drehachse. Die Grenzkurve selbst ist somit die Schnittkurve des Paraboloids mit einer Ebene, die parallel zur Drehachse und senkrecht zur Aufrißebene liegt; also, wie man leicht nachrechnet, eine Parabel.

Folglich ist auch der im Grundriß gesuchte Umriß eine Parabel. Ihren Scheitel gibt die senkrechte Tangente an die Meridianparabel im Aufriß, und es genügt (nach S. 51) noch éin Punkt, um Krümmungskreis und andere Punkte der Umrißparabel zu zeichnen. Man wird hierzu zweckmäßig denjenigen Punkt A auf dem Grundkreise der Fläche wählen, durch den die Grenzkurve geht.[1])

Eine beachtenswerte Eigentümlichkeit, die bisweilen bei Umrißkurven auftritt, soll das folgende Beispiel erläutern. Abb. 70 zeigt ein Ventil, d. h. einen Drehkörper, bestehend aus einem Kegelstumpf und einem Schaft, der, nach oben sich verjüngend, in einen Zylinder übergeht. Im Grundriß ist der Umriß zu zeichnen.

Der Kegel bietet nichts neues; die zur Grenzkurve gehörenden Mantellinien sind im Aufriß gestrichelt eingezeichnet und im Umriß als gemeinsame Tangenten zweier Ellipsen sichtbar.

Den Ventilschaft denken wir uns hohl, etwa wie eine Trompete. Von rechts oben schieben wir eine Kugel hinein, deren Durchmesser sich allmählich erweitert, so daß sie die Trompete stets berührt. Im Aufriß erhalten wir in jeder Stellung der Kugel einen Punkt der Grenzkurve als Schnitt des waagerechten (gestrichelten) Äquators mit dem (punktierten) Berührungskreise. Im zylindrischen Teil fällt der Aufriß der Grenzkurve mit dem der Drehachse zusammen; dann biegt die Grenzkurve nach unten ab. Ihr Aufriß ist, wie man durch Verfolgen der gleitenden Kugel feststellt, eine Kurve, die nach links bis zu der angegebenen senkrechten Tangente reicht, dann nach rechts unten umbiegt und endlich auf der Meridiankurve da aufsetzt, wo diese eine senkrechte Tangente hat. Zu diesem Endpunkt der Grenzkurve gehört eine Lage der Hilfskugel, bei der die beiden Kreise auf ihr sich berühren, und zwar in dem am weitesten rechts liegenden Punkte des Äquatorkreises. Ein Weiterschieben der Hilfskugel über diese Stellung hinaus gäbe keine Punkte der Grenzkurve mehr. Die Grenzkurve selbst besteht aus zwei Zweigen, die symmetrisch zur senkrechten Mittelebene der Trompete verlaufen. Nach oben rechts geht jeder dieser Zweige in eine Mantellinie des zylin-

1) Es ist bemerkenswert, wie hier wieder einmal durch eine theoretische Überlegung an Zeichenarbeit gespart wird. Denn wir brauchen, wie wir jetzt wissen, die Kugelmethode ja gar nicht mehr für den Umriß, sondern er ist einfach als Parabel zu zeichnen.

drischen Teils über, und unten treffen beide Kurvenzweige in einem Punkte der Mittelebene (mit waagerechter Tangente) zusammen. Wird nun das Umrißlot von rechts oben an der Vorderseite des Drehkörpers entlang geführt, so trifft es unten zunächst die Grundrißebene und erzeugt dort den Umriß. Dann stößt es allerdings an die Kante zwischen Schaft und Kegel. Führt man es am Schaft weiter, so zeichnet es den Umriß auf der Wölbung des Schaftes ein. Durch diesen Teil des Umrisses hebt sich der obere Teil des Schaftes von dem unteren stark erweiterten Teile ab.

Die senkrechten Tangenten der Grenzkurve sind Stellungen des Umrißlotes, in denen es die Drehfläche gleichzeitig berührt und durchdringt. Ähnlich, wie es die Tangente im Wendepunkt einer ebenen Kurve tut. Von dieser Lage ab berührt das weitergeführte Umrißlot die Trompete von innen; schließlich in der Mittelebene als senkrechte Tangente an die Meridiankurve. Von hier an ist es auf der Rückseite der Trompete zurückzuführen.

Der Teil der Umrißkurve, der vom Umrißlot gezeichnet wird, solange es die Trompete von innen berührt, bleibt unsichtbar, da er von der oberen Hälfte der Trompete selbst verdeckt wird. Die sichtbare Umrißkurve endet daher auf Vor- und Rückseite in je einem Punkte, der zu derjenigen Stellung des Umrißlotes gehört, in dem es die Drehfläche berührend durchsetzt, d. h. zu den am weitesten links liegenden Punkten der Grenzkurve, wo deren Tangenten senkrecht sind.

Schneiden wir von der Trompete ein Stück ab, wie es Abb. 71 zeigt, so kann man in ihr Inneres hineinblicken und ein Stück des inneren Umrisses wahrnehmen.[1])

Umriß und Grenzkurve sind nicht etwa nur von der Form des Drehkörpers abhängig, sondern durchaus auch von der Neigung seiner Drehachse. Der Leser überlege Umrisse für verschiedene Neigungen der Trompete, wobei er finden wird, daß nicht immer solche Spitzen, wie sie Abb. 71 zeigt, aufzutreten brauchen.

Ist nur der Umriß selbst verlangt, so hält man sich nicht mit der Grenzkurve auf, sondern zeichnet nur die Grundrisse der Äquatorkreise der Berührungskugeln und, diese Kreise umhüllend, die Umrißkurve. Deren Spitzen kommen dabei von selbst heraus, wären aber ohne unsere Überlegung ziemlich unverständlich.

Abb. 72 zeigt die Photographie eines trompetenförmigen Glases, bei der infolge des durchsichtigen Materials die ganze Umrißkurve erkennbar ist.

1) Der Leser zeichne einmal nur die Hälfte der Trompete, rechts unterhalb ihrer zur Aufrißebene senkrechten Mittelebene!

Fünftes Kapitel.

Röhrenflächen.

Eine Röhrenfläche oder kurz, ein Rohr, kann geometrisch so definiert werden: Eine Raumkurve wird als Mittellinie oder Achse des Rohres festgelegt, und um ihre Punkte werden Kugeln beschrieben, deren Radien einander gleich oder auch verschieden sind. Sind sie verschieden, so sollen sich die Radien zweier Kugeln beliebig wenig voneinander unterscheiden, wenn ihre Mittelpunkte auf der Achse hinreichend nahe beieinander liegen. Die die Kugeln umhüllende Fläche ist die Röhrenfläche. Kürzer gefaßt: Ein Rohr wird von einer Kugel beschrieben, die sich stetig durch den Raum bewegt, wobei der Radius gleich bleibt oder sich stetig ändert.

§ 1. Rohre mit konstantem Querschnitt.

Haben die Kugeln gleichen Radius, so hat das Rohr konstanten Querschnitt und jede Kugel berührt das Rohr in einem größten Kugelkreis. Um den Umriß des Rohres — zunächst im Grundriß — zu zeichnen, denken wir uns in irgend einem Punkte P der Rohrachse die Tangente gezogen und nehmen eine Aufrißebene zu dieser parallel. In Abb. 73 ist die Achse eines Rohrs im Grund- und Aufriß so gezeichnet. Beschreiben wir um den Punkt P éine der Kugeln, so erscheint ihr Berührungskreis mit dem Rohr im Aufriß als (punktierte) Gerade, denn er liegt in einer Ebene, die auf jener Tangente, also auch auf der Aufrißebene senkrecht steht. Der waagerechte Kugeläquator ist gestrichelt gezeichnet. Der Durchmesser, den diese beiden Kreise gemeinsam haben, erscheint im Aufriß als Punkt; im Grundriß in wahrer Länge und senkrecht zum Grundriß der Rohrachse (d. h. ihrer Tangente) stehend. In den Endpunkten dieses Durchmessers berührt das Umrißlot das Rohr (vgl. S. 68). Folglich sind im Grundriß die Endpunkte dieses Durchmessers Punkte des Umrisses.

Eine solche Wahl der Aufrißebene können wir nun bei jedem Punkte der Rohrachse treffen und dort für den Grundriß das gleiche folgern. Da vom geometrischen Standpunkt Grund- und Aufriß gleichwertig sind, gewinnen wir für die Zeichnung des Umrisses eines Rohres von konstantem Querschnitt im Grund- und Aufriß das *Prinzip:* Man lasse auf der Projektion der Rohrachse einen Punkt wandern und mit ihm die Kurvennormale. Trägt man auf der Normalen nach beiden Seiten den Radius des Rohres ab, so beschreiben die beiden auf der Normale erhaltenen

Punkte den Umriß. Man sagt auch, *die Umrisse eines Rohres von konstantem Qerschnitt werden von den Parallelkurven zum Grund- und Aufriß der Rohrachse gebildet.*

Die *Zeichenanweisung* ist einfach: Man schlägt um hinreichend dicht angenommene Punkte von Grund- und Aufriß der Rohrachse Kreise mit dem Rohrradius und zieht darauf die Umrisse als einhüllende Berührungskurven dieser Kreise.

Von der Grenzkurve wird dabei kein Gebrauch gemacht. Es sei nur bemerkt, daß ihr Aufriß nicht mit dem der Rohrachse zusammenfällt! Wohl ist in jeder einzelnen, parallel zu einer Achsentangente angenommenen Aufrißebene der Endpunkt des darauf senkrechten Kugeldurchmessers ein Punkt der Grenzkurve. Doch folgt daraus keineswegs, daß bei der Abbildung eines längeren Rohrstückes in ein- und derselben Aufrißebene der Aufriß der Grenzkurve mit dem der Rohrachse zusammenfällt.

Abb. 73 zeigt noch den *Schnitt des Rohres* durch eine waagerechte Ebene. Den Grundriß der Schnittkurve gewinnen wir durch die Vorstellung, daß die das Rohr durchgleitende Kugel durch die Schnittebene hindurchtritt. Die Kugel sei dabei glühend, und die Schnittebene bestehe aus feuchtem Papier. Die Kugel wird in jeder Stellung einen Kreis aus dem Papier ausbrennen, und die Umhüllungskurve dieser Kreise ist die Kontur des Schnittes.

Trotz der einfachen Anweisung für die Zeichnung der Umrisse eines Rohres können bei diesen Umrißkurven Erscheinungen auftreten, die einer besonderen Untersuchung bedürfen. Abb. 74 zeigt einen Rohrkrümmer, d. h. ein Stück Rohr, dessen Mittellinie von A bis B der vierte Teil eines Kreisbogens ist. In Abb. 74 liegt dabei diese Mittellinie in einer waagerechten Ebene.

Liegt sie in geneigter Ebene, so wird sich der Kreisbogen als Ellipse abbilden. In Abb. 75 ist strichpunktiert der Grundriß der Mittellinie für den Fall dargestellt, daß der Krümmer von Abb. 74 um eine zur Aufrißebene senkrechte Gerade gedreht wurde. A^* und B^* sind die Scheitel der Ellipse. M^* ist der Grundriß des Mittelpunktes einer im Rohr von rechts nach links gleitenden Kugel. Die Punkte U des inneren Umrisses (der äußere bietet nichts besonderes) werden vom Endpunkte der Normale beschrieben, während M^* den Grundriß der Rohrachse durchläuft.

Wie wir wissen, kann in der Nähe des Scheitels A^* die Ellipse durch den (eingezeichneten) Krümmungskreis ersetzt werden. Durchläuft nun M^* diese Zone, so wird die Ellipsennormale angenähert eine Drehung um den Krümmungsmittelpunkt K ausführen, und man sieht, daß der Umrißpunkt U dabei eine sich überschneidende Kurve mit zwei Spitzen durchläuft, sofern der Rohrradius M^*U größer ist als der Krümmungsradius A^*K der Ellipse.

In Abb. 75 ist gestrichelt noch der Umriß eines engeren Rohres gezeichnet, dessen Radius kleiner als der Krümmungsradius der Ellipse ist. Dieser Krümmungsradius hängt, bei ein- und demselben Krümmer, von dessen Neigung im Raume ab. Beim Auftreten einer solchen zweispitzigen Umrißkurve sind verschiedene Teile von ihr auszuziehen, je nachdem der rechte Stutzen des Krümmers nach oben oder unten gerichtet ist. Die Abb. 76a und 76b zeigen beides, wobei die Aufrisse Auf- oder Abwärtsrichtung erkennen lassen. In Abb. 77 sind solche Spitzen mehrfach zu sehen.

Bei der *Durchdringung zweier Rohre* läßt man in jedem eine Kugel gleiten und bringt je zwei Kugeln in solche Stellungen zueinander, daß sich ihre Berührungskreise mit den Rohren (im Raume) schneiden. Diese Schnittpunkte gehören der Durchdringungskurve der beiden Rohre an.

§ 2. Rohre mit veränderlichem Querschnitt.

Ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt entsteht ebenfalls durch die Bewegung einer Kugel, deren Mittelpunkt eine Raumkurve — die Rohrachse — beschreibt. Doch ändert sich der Kugeldurchmesser dabei stetig. Für die Zeichnung des Rohrumrisses gilt die gleiche Anweisung wie vorher: Um die Punkte von Grund- und Aufriß der Rohrachse sind Kreise zu beschreiben, deren Radius gleich dem der Kugel ist, die zu dem betreffenden Punkte gehört. Die Einhüllende dieser Kreise ist der Umriß.[1]) Man kann nämlich ein hinreichend kurzes Stück eines Rohres von veränderlichem Querschnitt als Kegelfläche ansehen (vgl. S. 68 und Abb. 68).

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, z. B. wie man bei einem solchen Rohr den Querschnitt in einem Punkte definieren soll, oder auf die Ermittlung der Grenzkurve, behandele ich als Beispiel *eine Aufgabe, die mir einmal von technischer Seite gestellt wurde* (Abb. 78).

Von einem Punkte A einer senkrechten Wand soll ein Rohr nach dem Punkte B einer waagerechten Ebene geführt werden. Das Rohr soll in A und B senkrecht auf den betreffenden Ebenen aufsetzen und dort in ein zylindrisches Rohr übergehen. Die Weite des Rohres soll von A nach B gleichförmig zunehmen, und endlich soll die Rohrachse eine „glatte Kurve“ sein.

Die Aufrißebene I der Abb. 78 ist senkrecht zur Wand und der waagerechten Ebene angenommen. Eine zweite Aufrißebene II liegt in der Wand selbst. Die (strichpunktierte) Rohrachse ist durch die Vorschrift, die Punkte A und B durch eine

1) Parallelkurven zur Projektion der Rohrachse spielen bei veränderlichem Querschnitt keine Rolle.

glatte Kurve zu verbinden und dort Tangenten senkrecht zu den Ebenen zu haben, keineswegs ganz festgelegt, doch war nichts weiter vorgeschrieben. Um die Konstruktion zu vereinfachen, wählen wir als Grundriß der Rohrachse denjenigen Kreisbogen durch A^* und B^*, der in A^* eine zur Wand senkrechte Tangente hat, und zeichnen den Aufriß I der Rohrachse als glatte Kurve, die in A' eine waagerechte und in B' eine senkrechte Tangente hat. Damit ist zeichnerisch die Rohrachse im Raum festgelegt.

Diese Raumkurve wird nun — wie gleich gezeigt werden wird — zwischen A und B in zehn gleiche Teile geteilt und um jeden Teilpunkt eine Kugel gelegt. Die Radien dieser Kugeln wachsen gleichmäßig vom Radius r_a des Anschlußrohres in A bis zum Radius r_b des senkrechten Anschlußrohres in B. Die Nebenfigur oben rechts dient zur Darstellung der elf Kugelradien.

Um die Rohrachse einzuteilen, stellen wir uns die senkrechte Kreiszylinderfläche vor, deren Grundkreis der Kreisbogen A^*B^* ist und die oben durch die Rohrachse begrenzt wird, und wickeln diese Zylinderfläche in die durch A parallel zur Aufrißebene gelegte Ebene ab. Der Kreisbogen A^*B^* wird dabei zur Geraden A^*B_0 gestreckt. Ein Teilpunkt T der Rohrachse kommt bei dieser Abwicklung der Zylinderfläche nach T_0; dieser Raumpunkt liegt senkrecht über demjenigen Punkte $T_0{}^*$, der aus dem Grundriß T^* von T durch die Abwicklung des Kreisbogens A^*T^* hervorgeht, wenn die Strecke $A^*T_0{}^*$ gleich dem Bogen A^*T^* gemacht wird. Die Höhe von T_0 ist gleich der von T, womit auch der Aufriß T_0' des Punktes T_0 bestimmt ist. So erhält man im Aufriß das Bild der in der abgewickelten Zylinderfläche liegenden Rohrachse als gestrichelte Kurve $A'B_0'$. Diese Kurve zeigt die Bogenlänge der Rohrachse in wahrer Größe, so daß auf ihr deren Einteilung in zehn gleiche Teile vorgenommen werden kann. Die so erhaltenen Teilpunkte T_0' werden durch waagerechte Geraden in den Aufriß der gekrümmten Rohrachse nach T' übertragen und von hier nach T^* in den Grundriß. In der Nähe von A und B gibt dies schlechte Schnitte, und man lotet hier besser die Teilpunkte von der Kurve $A'B_0$ herunter auf die Abwicklung A^*B_0, überträgt sie von dieser in den Grundriß der gekrümmten Rohrachse und (in der Nähe von A) von da auf deren Aufriß.

Sind nun Grund- und Aufriß der gekrümmten Rohrachse eingeteilt, so beschreibt man um jeden Teilpunkt einen Kreis mit dem zugehörigen, der Nebenfigur zu entnehmenden Radius. Die Umhüllungskurven dieser Kreise sind die Umrisse des Rohres. Ein zweiter Aufriß II erhöht die Deutlichkeit der Darstellung.[1])

1) Im Grundriß bekommt der Umriß Spitzen (vgl. Abb. 70).

§ 3. Die Ringfläche.

Als Ringfläche bezeichnet man ein Rohr, dessen Achse oder, wie wir in diesem Paragraphen sagen wollen, *Mittellinie* ein Kreis und dessen Querschnitt konstant ist. Diese Fläche könnte ebensogut als Drehfläche bezeichnet werden, deren Drehachse auf der Ebene jenes Kreises im Mittelpunkte senkrecht steht. In den beiden Fällen, in denen die Drehachse parallel oder senkrecht zur Bildebene steht, bietet die Zeichnung des Umrisses nichts besonderes. Ist die Drehachse dagegen geneigt, so ist der Umriß interessanter. Auch die Konstruktion der Grenzkurve ist dabei recht förderlich für die Raumanschauung.

Abb. 79 zeigt eine solche Ringfläche, von der ein Viertel weggeschnitten ist, um Einzelheiten besser erkennbar zu machen. Der Grundriß der Mittellinie ist eine Ellipse. Bei der Wanderung eines Punktes auf dieser erzeugt die zugehörige Ellipsennormale durch ihre Endpunkte in bekannter Weise den inneren und äußeren Umriß.[1]) Für die Endpunkte der langen Hauptachsen der Ellipse gilt wörtlich die Überlegung von S. 74 über die Drehung der Normale um den Mittelpunkt des Krümmungskreises. Der dort betrachtete Krümmer war ja ein Stück Ringfläche. Die innere Umrißkurve hat, bei hinreichender Neigung der Ringfläche, vier Spitzen. Abb. 75 läßt dies einsehen, wenn man an den Krümmer nicht ein gerades Rohr anschließt, sondern die Krümmung nach rechts fortgesetzt denkt. Abb. 80, von der noch die Rede sein wird, läßt die vier Spitzen ebenfalls erkennen. Auszuziehen wäre bei einer vollständigen Ringfläche vom inneren Umriß nur das Stück zwischen den beiden auf derselben Seite der großen Ellipsenachse liegenden Spitzen. Dadurch hebt sich der obere Teil der Ringfläche von dem unteren ab. Abb. 79 zeigt von diesem Teil des inneren Umrisses nur eine Hälfte, da die andere infolge des herausgeschnittenen Rohrstückes nicht existiert; dafür erblickt man ein Stück des linken Umrisses von dem unten liegenden Teil der Ringfläche. Ferner ist beim Hineinblicken in das Innere des hohl gedachten Ringes ein Stück des inneren Umrisses zu sehen, das in der unten links liegenden Spitze endigt.

Wenn jemand, unbeschwert von Theorie, die Umrißkurven nach der Zeichenanweisung für Röhrenflächen (S. 74) gewinnt und um Punkte der Ellipse, die er als Grundriß der Mittellinie des Ringes erhalten hat, unentwegt Kreise mit dem Kugelradius schlägt, so entsteht die Abb. 80, in der die vier Spitzen ganz von selbst erscheinen. Diese Abb. 80 soll übrigens auch als abschreckendes Beispiel wirken, weil sie zeigt, daß das

1) Dieser besteht nicht etwa in Ellipsen; sondern er wird durch die beiden Parallelkurven einer Ellipse gebildet.

vielfach beliebte Ausziehen der Hilfskreise keineswegs das Bild der Ringfläche plastisch hervortreten läßt. Zieht man jedoch nur die Umrißkurven aus — die äußere ganz und von der inneren nur das Stück zwischen den Spitzen rechts oben und rechts unten — so erhält man die Abb. 79, wenn man sich dort das fehlende Stück der Ringfläche eingefügt denkt.

Das Auftreten von Spitzen hängt vom Radius r der die Ringfläche beschreibenden Kugel, vom Radius R der Mittellinie und vom Neigungswinkel α der Drehachse der Ringfläche in der Weise ab, daß Spitzen nur dann auftreten, wenn $0 < \sin^2 \alpha < \frac{r}{R}$ ist.

Nun zur *Grenzkurve im Aufriß*. Denkt man sich eine der die Ringfläche erzeugenden Kugeln und auf ihr den Berührungskreis mit der Ringfläche, sowie den waagerechten Äquator gezeichnet, so sind die beiden Schnittpunkte dieser Kreise Punkte der Grenzkurve. In Abb. 79 sei M der Mittelpunkt einer Kugel. Der waagerechte Äquator und die Horizontalebene, in der er liegt, erscheint im Aufriß als die waagerechte durch M gehende Gerade. Im Punkte D trifft die Drehachse diese Horizontalebene. Der Kreis, in dem die Kugel die Ringfläche berührt, würde in diesem Aufriß als Ellipse erscheinen, doch erübrigt sich deren Zeichnung. Die Ebene, in der dieser Berührungskreis liegt, enthält die Drehachse, was man sieht, wenn man sich Ringfläche und Kugel deutlich vorstellt. Im Notfall würde es eine senkrecht zur Drehachse anzunehmende Bildebene zeigen. Der Kugeldurchmesser, in dem die Ebenen des Äquators und des Berührungskreises sich schneiden, und dessen Endpunkte Punkte der Grenzkurve sind, liegt also sowohl in der horizontalen Äquatorebene als auch in der die Drehachse enthaltenden Ebene des Berührungskreises; seine Verlängerung muß daher die Drehachse im Punkte D schneiden, denn dies ist der einzige Punkt, den Drehachse und Äquatorebene gemeinsam haben. Um nun die Endpunkte dieses Kugeldurchmessers zu bestimmen, klappen wir die Ebene des Berührungskreises um die Drehachse in die Lage parallel zur Aufrißebene. Der Kugelmittelpunkt M kommt dabei nach M_0, dem Aufriß vom Mittelpunkte des Kreises, der im Aufriß zum Umriß des Ringes gehört, und der umgeklappte Berührungskreis fällt mit diesem Umrißkreis zusammen. Der Kugeldurchmesser MD wird in die (punktiert gezeichnete) Lage M_0D geklappt.

In der Umklappung sind die Schnittpunkte dieses Durchmessers mit dem Berührungskreise sofort erkennbar und können, dem Zurückklappen der Ebene entsprechend, auf DM übertragen werden. Im Aufriß der Abb. 79 ist bei der unteren Rohrhälfte nur einer der auf diese Weise gefundenen Endpunkte des Kugeldurchmessers durch den dunklen Punkt markiert. Die Konstruk-

tion eines anderen Punktes der Grenzkurve ist in gleicher Weise oben durchgeführt. So kann man beliebig viele Punkte der Grenzkurve und danach diese selbst zeichnen. In Abb. 76 sind nur die wirklich sichtbaren Teile der Grenzkurve gezeichnet, so weit sie auf der Oberfläche des zerschnittenen Ringes zu sehen sind. Die fehlenden und unsichtbaren Teile der Grenzkurve eines vollständigen Ringes, die aus zwei geschlossenen Zweigen besteht, liegen zu den gezeichneten symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt der Ringfläche. Man sieht, daß die im Grundriß auftretenden Spitzen beim inneren Umriß zu denjenigen Punkten des inneren Zweiges der Grenzkurve gehören, wo deren Aufriß senkrechte Tangenten hat (vgl. Abb. 70).[1]

Sechstes Kapitel.

Schraubenlinien und Schraubenflächen.

§ 1. Die Schraubenlinie und ihre Ansichten.

Ein Punkt beschreibt eine Schraubenlinie, wenn sein Grundriß mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis — den sog. Grundkreis der Schraubenlinie — durchläuft und seine Höhe dabei gleichförmig zunimmt.

Präziser drücken dies die *Gleichungen der Schraubenlinie* aus: Die x- und y-Achse eines xyz-Koordinatensystems legen wir in die Grundrißebene und schlagen im Grundriß um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius r. Nennen wir φ den Winkel zwischen einem Radius dieses Kreises und der x-Achse, so geben die Gleichungen

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \\ z = C \cdot \varphi \qquad (C\colon \text{Konstante}) \end{cases}$$

die Koordinaten der Punkte einer Schraubenlinie. Die ersten beiden sagen aus, daß der Grundriß eines sie durchlaufenden Punktes einen Kreis beschreibt, wenn in den Gleichungen φ variabel ist, und die dritte, daß sich die Höhe des Punktes dem Winkel φ proportional ändert.

Der Konstanten C wollen wir sogleich eine anschauliche Bedeutung geben. Wächst φ von 0 bis 2π, so ist der Grundriß gerade einmal durchlaufen, und die Höhe des Punktes ist von 0 bis $2\pi \cdot C$ gewachsen. Bei einem zweiten Umlauf und allen fol-

1) Der Leser wird zugeben, daß diese Überlegungen ein treffliches Beispiel für die wechselseitige Unterstützung von Anschauung und logischem Schließen sind.

genden würde sie um den gleichen Betrag zunehmen. Man nennt daher $h = 2\pi \cdot C$ die *Ganghöhe* der Schraubenlinie. Führt man dieses Maß in die dritte Gleichung ein, so lautet sie

$$z = \frac{h}{2\pi} \cdot \varphi.$$

Durch die Konstanten h und r ist eine Schraubenlinie bestimmt. Je nachdem der Grundkreis in einem oder dem anderen Sinne durchlaufen wird, erhält man eine rechts oder links gewundene Schraubenlinie. Weist, wie in Abb. 81, die positive Richtung der x-Achse nach links, und läßt man den Kreisradius im positiven Sinne (d. h. dem Uhrzeiger entgegengesetzt) umlaufen und rechnet dementsprechend den Winkel φ, so erhält man durch unsere drei Gleichungen eine rechts gewundene Schraubenlinie.

Die Schraubenlinie liegt auf einem Zylinder, dessen Achse als *Achse der Schraubenlinie* bezeichnet wird. Wickelt man diesen Zylinder ab, so bildet in der *Abwicklung die Schraubenlinie* eine Gerade, die einen Steigungswinkel σ hat, und man sieht, daß $\tan \sigma = \frac{h}{2r\pi}$ ist.[1]

Der Aufriß der Schraubenlinie ist eine Sinuslinie mit der Gleichung $x = r \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{z}{h}\right)$. Um ihn zu zeichnen, teilt man den Grundkreis und die Ganghöhe in die gleiche Anzahl gleicher Teile (zweckmäßig 8 oder 16) und trägt über jedem Teilpunkt des Grundkreises die zugehörige Höhe auf.

Die *Tangenten der Schraubenlinie* haben sämtlich den Steigungswinkel σ. Im Aufriß zeigen nur die zur Aufrißebene parallelen Tangenten, die zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ und den entsprechenden Winkeln bei mehrmaligen Umläufen gehören, den Steigungswinkel σ.[2] Um auch andere Punkte des Aufrisses bequem mit Tangenten versehen zu können, nimmt man auf der Achse in der Höhe $\frac{h}{2\pi}$ einen Punkt als Spitze eines Kegels an, der den gleichen Grundkreis wie die Schraubenlinie hat. Die Mantellinien dieses Kegels — des sog. *Tangentenkegels* — haben dann den Steigungswinkel σ. Um nun im Aufriß P' eines Punktes der Schraubenlinie die Tangente zu bekommen, zieht man im Grundriß einen Radius m^* senkrecht zu dem nach P^* führenden. Dies ist der Grundriß derjenigen Mantellinie des Tangentenkegels, die der Tangente im Punkte P parallel ist. Der

1) Die Abwicklung ist in Abb. 81 rechts unten in kleinerem Maßstabe gezeichnet.

2) In Abb. 81 ist die zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gehörende Tangente punktiert eingezeichnet.

Aufriß m' dieser Mantellinie gibt die gesuchte Tangentenrichtung.

Zum Zeichnen der Scheitel, z. B. S, der Sinuslinie im Aufriß braucht man die zugehörigen *Krümmungskreise.* Dazu denken wir den Zylinder, auf dem die Schraubenlinie liegt, durch eine Ebene geschnitten, welche die durch S parallel zur Aufrißebene gelegte Höhenlinie enthält und den Steigungswinkel σ hat. Diese Ebene schneidet aus dem Zylinder eine Ellipse aus, die in S die gleiche Tangente wie die Schraubenlinie hat und sich an diese anschmiegt. In hinreichender Nähe von S kann die Ellipse bei der Zeichnung der Schraubenlinie diese ersetzen. Die Halbachsen der Ellipse sind r und $\frac{r}{\cos\sigma}$, und die Halbachsen ihrer Bildellipse im Aufriß wären r und $r \cdot \tan\sigma$.[1]) Der Krümmungsradius dieser Bildellipse in S wäre demnach $\varrho = r \cdot \tan^2\sigma$. Der Krümmungskreis mit diesem Radius ersetzt bei S die Bildellipse, und diese wiederum ersetzt den Aufriß der Schraubenlinie; also ist dieser Krümmungskreis auch derjenige der Schraubenlinie und wird bei deren Zeichnung benutzt. Seinen Radius ϱ gibt ein Lot, das man in der Spitze des Tangentenkegels auf einer zur Aufrißebene parallelen Mantellinie errichtet, wie es in Abb. 81 gestrichelt eingezeichnet wurde. Denn der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Grundkreisebene hat von der Achse gerade den Abstand ϱ.

Abb. 81 zeigt noch *drei Ansichten* I, II und III *derselben Schraubenlinie* in Bildebenen, die senkrecht zur Aufrißebene und senkrecht zu den entsprechend bezeichneten Pfeilrichtungen angenommen wurden. In allen drei Ansichten ist die Achse der Schraubenlinie strichpunktiert gezeichnet. Der Abstand eines Punktes der Schraubenlinie von der Mittelebene, die parallel zur Aufrißebene durch ihre Achse geht, kann im Grundriß gemessen werden und erscheint in den neuen Ansichten als Abstand des Bildpunktes vom Bilde der Achse (s. S. 21).

Um nun die Ansicht I zu zeichnen, bei der die Pfeilrichtung eine kleinere Neigung hat als die Tangenten der Schraubenlinie, verfolgen wir einen Punkt, der die Schraubenlinie mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, und bezeichnen mit Ziffern seine zu Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ gehörenden Stellungen. Vom Aufriß dieses Punktes führt ein parallel der Pfeilrichtung gelegtes Projektionslot zum neuen Bilde des Punktes, und es ist wichtig, auf die Bewegung dieses Projektionslotes zu achten, während der Punkt die Schraubenlinie durchläuft. Die Abstände des Punktes von der Mittelebene sind aus dem Grundriß auf das Projektionslot zu übertragen. Die Parallelverschiebung des Projektionslotes er-

1) Der Leser denke sich einen Aufriß senkrecht zur Schnittebene.

folgt während der Wanderung des Punktes von 0 nach 2 langsamer, als während der Wanderung von 2 bis 4. Die Ansicht I zeigt daher eine *Wellenlinie*, deren Wellen verschieden stark gekrümmt sind.

Ganz anders in der Ansicht II. Die Richtung des Pfeiles II und damit die des Projektionslotes ist hier steiler als die der Tangenten der Schraubenlinie. Beginnt der Punkt seine Wanderung in 0, so wird sich das Projektionslot zunächst nach links oben verschieben. Es gibt jetzt aber zwischen 0 und 1 eine Lage des wandernden Punktes, in der das Projektionslot den Aufriß der Schraubenlinie berührt.[1]) Wandert der Punkt nun weiter, so verschiebt sich das Projektionslot nach rechts unten. Seine Parallelverschiebung wechselt also die Richtung. Zwischen 1 und 2 gibt es wieder eine Stelle, wo das Projektionslot den Aufriß der Schraubenlinie berührt. Von hier aus verschiebt es sich, nach abermaligem Wechsel der Bewegungsrichtung, wieder nach links oben. Verfolgt man gleichzeitig die Abstände des Punktes von der Mittelebene, so erklärt sich die Ansicht II der Schraubenlinie. In diese Ansicht ist noch die Fortsetzung der Schraubenlinie über den Punkt 0 hinaus ($\varphi < 0$) aufgenommen, die im Aufriß fehlt, aber leicht vorstellbar ist. Die Ansicht II zeigt eine *Kurve mit Schleifen*. Die beiden eine solche Schleife begrenzenden, zur Achse senkrechten Tangenten (nur eine ist eingezeichnet) entsprechen denjenigen Lagen des Projektionslotes, in denen es den Aufriß der Schraubenlinie berührt. Mittels des Tangentenkegels kann man diese Berührungspunkte genau konstruieren, indem man von der zur Pfeilrichtung II parallelen Mantellinie ausgeht. Auch der Überschneidungspunkt, wo in der Ansicht II der Bogen —1; 0 vor dem Bogen 2; 3 vorbeigeht, läßt sich aus den Schnittpunkten der Aufrißkurve mit dem von 1 ausgehenden Projektionslot leicht festlegen. Endlich lassen sich auch die Krümmungskreise in den Punkten 1 und 3 in der Ansicht I und II unschwer durch entsprechende Überlegungen, wie sie beim Aufriß angestellt wurden, ermitteln.

Die Pfeilrichtung III hat genau die gleiche Steigung wie die Tangenten der Schraubenlinie, und die Ansicht III zeigt als Bild der Schraubenlinie eine *Kurve mit Spitzen* (es ist nur der auf éiner Seite der Achse liegende Teil vom Bilde der Schraubenlinie gezeichnet). Bei der Wanderung des Punktes von 2 nach 4 macht jetzt das Projektionslot im Punkte 3 sozusagen eine Ruhepause, wodurch die Spitze entsteht.

Wir wollen uns, um eine Übersicht über *alle möglichen Bilder einer Schraubenlinie* zu erhalten, die Pfeilrichtung, d. h. die Projektionsrichtung, stetig veränderlich denken. Ist die Pfeil-

---

1) Was bei I nicht vorkam.

richtung waagerecht, so erhalten wir ein Bild, wie es der Aufriß zeigt, also eine Sinuslinie. Neigen wir die Pfeilrichtung etwas, so verlieren die Wellen das Gleichmaß der Sinuslinie und werden teils schmaler, teils breiter. Bei weiterer Neigung wird die schmale Welle immer enger und zieht sich schließlich zu einer Spitze zusammen. Steigern wir die Neigung weiter, so überschlägt sich diese Welle und es entsteht eine Schleife. Diese geht schließlich in den Grundkreis über, wenn die Pfeilrichtung senkrecht geworden ist. Das ist auf dem Papier leicht einzusehen. Wichtiger ist es jedoch, sich eine Schraubenlinie aus Draht vorzustellen und bei wechselnder Neigung dieses Modells die entsprechenden Bilder zu „sehen". Vielleicht hilft dabei die Bemerkung, daß (bei Ansicht III) in der Spitze ein Punkt der Schraubenlinie liegt, in dem ihre Tangente auf der Bildebene senkrecht steht.

§ 2. Die gerade Schraubenfläche und einiges über Regelflächen.

Mit der Schraubenlinie stehen verschiedene Schraubenflächen im Zusammenhang. Es sind darunter sog. Regelflächen, über die daher einiges vorausgeschickt werde.

Als *Regelfläche* bezeichnet man eine Fläche, die bei der stetigen Bewegung einer Geraden im Raum von dieser Geraden beschrieben wird. Um die Bewegung der Geraden — hier *Erzeugende* genannt — darzustellen, legt man zwei Raumkurven als „*Leitkurven*" fest und läßt auf jeder je einen Punkt wandern. Als Verbindungsgerade dieser beiden „Leitpunkte" ist dann die Bewegung der Erzeugenden im Raume gegeben. Es genügt aber nicht etwa, nur die beiden Leitkurven zu fixieren, sondern es ist noch nötig festzusetzen, nach welchem Gesetz ihre Punkte durch die Erzeugenden zu verbinden sind.

Sind die beiden Leitkurven z. B. gleich große Kreise, die so in parallelen Ebenen liegen, daß die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte zu diesen Ebenen senkrecht ist, und setzt man fest, daß solche Punkte dieser Leitkurven zueinander gehören, deren Verbindungsgerade senkrecht auf jenen Ebenen steht, so erzeugen diese Verbindungsgeraden einen Zylinder. Sind dagegen die Punkte der beiden Kreise einander derart zugeordnet, daß die sie verbindende Erzeugende die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte schneidet, so wird die Regelfläche ein Kegel. Ordnet man die Punkte anders als in diesen beiden Sonderfällen einander so zu, daß ihre Verbindungsgerade konstante Neigung behält, so beschreibt diese als Erzeugende eine krumme Fläche, die *Hyperboloid* genannt wird und die in Abb. 82 dargestellt ist. In dieser Abbildung sind auf der rechten Seite nur die Erzeugenden, etwa als Drähte gedacht, gezeichnet, ohne die sie bedeckende Fläche,

so daß die Drähte sämtlich sichtbar sind. In der linken Hälfte der Abb. 82 ist die Fläche dargestellt. Ihr Umriß in der Aufrißebene ist eine Kurve (eine Hyperbel), die die Aufrisse aller Erzeugenden berührt. Im Grundriß ist der Umriß ein Kreis, der von den Grundrissen der Erzeugenden[1]) berührt wird. Von jeder Erzeugenden ist nur das Stück bis zum Berührungspunkte mit der Umrißkurve sichtbar.[2])

Eine Regelfläche ist unbegrenzt, weil es ihre Erzeugenden sind. Die Leitkurven dienen ja nur zur Beschreibung der Bewegung der Erzeugenden, was auch auf andere Weise möglich wäre. Darzustellen ist jedoch stets ein begrenztes Flächenstück und wohl zu beachten, daß dabei außer den begrenzenden Randkurven noch *Umrißlinien* auftreten können, die von den Bildern der Erzeugenden eingehüllt erscheinen. Eine Zylinder- oder Kegelfläche stellt man ja auch dar, indem man die Kreise oder sonstigen Kurven, die den Mantel begrenzen, zeichnet (Abb. 52), dazu aber auch den Umriß, wie er durch die äußersten Mantellinien, d. h. zwei spezielle Erzeugende, gebildet wird. Die Einhüllung einer Umrißkurve durch mehrere Erzeugende kommt bei diesen einfachsten Regelflächen allerdings nicht vor. In Abb. 82 sind dagegen die beiden Kreise (oben und unten) die Randkurven, und die Umrisse dieses begrenzten Stückes des Hyperboloids werden von den Bildern der Erzeugenden eingehüllt.

Schnitte von Regelflächen mit Ebenen oder anderen Flächen sind dadurch einfach zu konstruieren, daß man deren Schnittpunkte mit den Erzeugenden der Regelfläche aufsucht.

Als *gerade Schraubenfläche* bezeichnet man eine Regelfläche, deren Erzeugende die von den Punkten einer Schraubenlinie auf ihre Achse gefällten Lote bilden.[3]) Diese Schraubenfläche ist durch ein einziges Maß, nämlich ihre Ganghöhe völlig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, ob sie rechts oder links gewunden sein soll. Jeder zu ihrer Achse koachsiale Zylinder schneidet sie in einer Schraubenlinie gleicher Ganghöhe. Je kleiner der Durchmesser des Zylinders, um so größer ist (bei der gleichen Schraubenfläche) die Steigung der ausgeschnittenen Schraubenlinie.

Die drei Gleichungen einer Schraubenlinie (S. 79) sind auch *Gleichungen einer geraden Schraubenfläche*, wenn man sowohl φ wie auch r als beliebig veränderliche Parameter ansieht.

---

1) Im Grundriß ist nur eine Erzeugende eingezeichnet.

2) Die Fläche ist übrigens eine Drehfläche. Ihre Meridiankurve ist eine Hyperbel und die Drehachse deren Nebenachse. Macht man die Hauptachse einer Hyperbel zur Drehachse, so entsteht auch ein Hyperboloid, das jedoch keine Regelfläche ist. Die beiden Hyperboloide werden als „ein- oder zweischalig" unterschieden.

3) Die Fläche wird auch Wendelfläche genannt, weil sie durch die Stufenkanten einer Wendeltreppe gelegt werden kann.

In Abb. 83 ist ein *Streifen einer geraden Schraubenfläche* dargestellt, der aus der unbegrenzten durch zwei koachsiale Zylinder herausgeschnitten wird. Die beiden Schraubenlinien sind die Randkurven des Streifens und gleichzeitig Leitkurven der Erzeugenden. Im Grund- oder Aufriß treten Umrißkurven nicht auf. Wohl aber in den Ansichten I, II und III, welche in Bildebenen erscheinen, die senkrecht zur Aufrißebene und senkrecht zu den entsprechend numerierten Pfeilrichtungen eingeführt wurden. Bei der Zeichnung dieser Bilder ist darauf zu achten, in welcher Gestalt die beiden Leitkurven auftreten, ob ihre Bilder Wellen, Schleifen oder Spitzen zeigen, was aus dem Vergleich der Richtungen der Pfeile mit denen der Tangenten hervorgeht.

In Ansicht I zeigen beide Schraubenlinien Wellen. Da die Neigung der Pfeilrichtung I von der Neigung der Tangente der inneren Schraubenlinie mehr abweicht als von der der äußeren, zeigt das Bild der äußeren Schraubenlinie eine schmälere Welle als das der inneren. Wo sich die Bilder der Schraubenlinien kreuzen, treten *Umrißkurven auf*. Um sie zu zeichnen, läßt man auf den Leitkurven die Leitpunkte wandern und achtet auf die verbindende Erzeugende. Die Zuordnung dieser beiden Leitpunkte ist natürlich die gleiche wie im Grund- und Aufriß.

Abb. 84a zeigt eine Kreuzungsstelle der Bildkurven (die untere) vergrößert.[1]) Das Bild der inneren Schraubenlinie ist s_i, und s_a das der äußeren. Der dunkle Punkt wandert auf der inneren und der helle Punkt auf der äußeren Leitkurve. Die Erzeugenden verbinden beide Punkte und sind entsprechend dem Fortschritt der Bewegung numeriert. Die Leitpunkte wandern von der Lage 1 aus auf ihren Leitkurven weiter. In der Lage 2 passiert der helle Punkt die Kreuzungsstelle K der Leitkurven, während der dunkle Punkt noch weitab von ihr ist. In der Lage 3 hat der helle Punkt die Kreuzung bereits passiert, der dunkle noch nicht. Erst in der Lage 7 passiert der dunkle Punkt die Kreuzung, und in der Lage 8 haben beide Punkte diese Stelle hinter sich.[2]) Zwischen den Lagen 2 und 7 überschneiden sich die Erzeugenden und hüllen eine Umrißkurve ein, die in Abb. 84a fortgelassen, in Abb. 83, I eingezeichnet ist.

Die Bilder der Leitkurven kreuzen sich in der Ansicht I von Abb. 83 zweimal. Beide Male treten Umrißkurven auf, aber die Schraubenlinien sind verschieden ausgezogen, je nachdem, wie die eine vor der anderen vorbeigeht. Unten auf der Zeichnung liegt die äußere Schraubenlinie vorn, oben die innere.

---

1) Aber nicht maßstäblich.

2) Im Aufriß der Abb. 83 passierten die Leitpunkte die Kreuzungsstellen gleichzeitig!

Die eigenartige Verwindung der Schraubenfläche würde deutlicher hervortreten, wenn man die beiden Seiten verschieden färbte. Um dies wenigstens anzudeuten, wurden die Erzeugenden auf éiner Seite der Fläche ausgezogen, auf der anderen punktiert. Der Leser möge die Abb. 83 mit Buntstiften ergänzen.

In der Ansicht II hat das Bild der äußeren Schraubenlinie Schleifen, das der inneren Wellen, und im Bild der Schraubenfläche zeigt sich eine Spitze. Abb. 84b zeigt deren Zustandekommen. Die Leitpunkte durchlaufen die Leitkurven s_i und s_a in entgegengesetzter Richtung (vgl. Abb. 81, I u. II), und die Erzeugende wird dabei entsprechend geschwenkt, wobei sie eine Umrißkurve mit Spitze einhüllt. In Abb. 84b ist die Umrißkurve nur rechts eingezeichnet, und man überzeugt sich, daß sie glatt in das Bild der Schraubenlinie s_i übergeht, weil diese von dem Bilde einer der Erzeugenden berührt wird. In Abb. 83, II ist nur éine Seite der Spitzenkurve auszuziehen, nämlich diejenige, welche in das Bild des vorne liegenden Teiles der inneren Schraubenlinie übergeht. In Ansicht II ist nur éine Seite der Fläche zu sehen.

Ansicht III zeigt den Fall, daß das Bild der äußeren Schraubenlinie eine Spitze hat; endlich die nur schematisch gemeinte Ansicht IV, daß die Bilder beider Schraubenlinien Schleifen haben.[1])

§ 3. Die schiefe Schraubenfläche.

Zieht man von den Punkten einer Schraubenlinie Erzeugende so zur Achse, daß sie diese alle unter dem gleichen (von 90° verschiedenen Winkel) schneiden, so entsteht eine schiefe Schraubenfläche, wie sie Abb. 85 zeigt. Hier entstehen bereits im Aufriß von den Aufrissen der Erzeugenden eingehüllte *Umrißkurven u*, die glatt in den Aufriß der Schraubenlinie und den der Achse übergehen. Abb. 85 zeigt die Schraubenfläche begrenzt von der Achse und der Schraubenlinie, ferner oben von einer Erzeugenden und unten durch die Schnittkurve der Schraubenfläche mit der Grundrißebene. Diese Schnittkurve besteht aus den Spurpunkten der Erzeugenden. Die Abstände der Spurpunkte vom Mittelpunkt des Grundkreises ändern sich proportional dem Azimuth (s. S. 10) der Erzeugenden; die Schnittkurve ist somit eine *Archimedische Spirale*. Zu deren Zeichnung genügen, außer dem Mittelpunkt des Grundkreises, zwei Punkte, weil dann der Zusammenhang von Azimuth und Abstand bestimmt ist.

Abb. 86 zeigt einen Gang eines *Schneckengewindes*, das dadurch entsteht, daß sich um einen Zylinder, den sog. Kernzylinder des

1) Fehlt denn aber nicht die Ansicht, wo die innere Schraubenlinie Schleifen und die äußere Wellen zeigt?

Gewindes, ein Trapez — das Profil des Gewindes — emporschraubt. Das Trapez liegt mit der Achse des Zylinders in einer Ebene. Es ist links unten im Aufriß (zum Teil gestrichelt) gezeichnet. Die Ecken des Trapezes laufen auf vier Schraubenlinien gleicher Ganghöhe, und die geneigten Seiten des Trapezes beschreiben schiefe Schraubenflächen. Nach deren Aufzeichnung in Blei ist beim Ausziehen auf die Sichtbarkeit zu achten. Ferner auf die *Umrißkurven*. Zwischen den Punkten 1 und 2 liegt ein Stück Umrißkurve der schiefen Schraubenfläche (vgl. Abb. 85), deren nicht existierende Fortsetzung punktiert gezeichnet ist. Links unterhalb des Punktes 2 ist ein Stück Schraubenlinie gestrichelt. Ebenso treten bei *u* Umrißkurven auf. Oben ist Gewinde und Kern durch eine waagerechte Ebene geschnitten. Der Grundriß zeigt die beiden Archimedischen Spiralen, die beim Schnitt der beiden schiefen Schraubenflächen auftreten.

Die *unbegrenzte schiefe Schraubenfläche*, bei der die Erzeugenden über die Achse hinaus verlängert werden, durchsetzt sich selbst in Schnittkurven, die Schraubenlinien sind. Abb. 87 zeigt eine Schraubenfläche begrenzt durch die innerste dieser Schraubenlinien, sowie oben und unten durch je eine Erzeugende (Pfropfenzieher!).[1])

---

1) Es gibt noch andere Schraubenflächen als die hier besprochenen. (Z. B. die „Schraubentangentenfläche" deren Erzeugende durch die Tangenten einer Schraubenlinie gebildet werden.) Nicht alle Schraubenflächen sind Regelflächen!

Ein *allgemeines Prinzip zur Erzeugung von Schraubenflächen* ist folgendes: In einer zur Achse der Schraubenfläche senkrechten Ebene ist eine Kurve, die sog. Querschnittskurve der Schraubenfläche, gegeben. Die Ebene wird nun so bewegt, daß ihre Punkte Schraubenlinien (gleicher Ganghöhe) um jene Achse beschreiben. Dann beschreibt dabei die Querschnittskurve die Schraubenfläche.

Unsere gerade und schiefe Schraubenfläche würden nach diesem Prinzip entstehen, wenn die Querschnittskurve eine die Achse schneidende Gerade oder eine von der Achse ausgehende Archimedische Spirale ist. Beim sog. Spiralbohrer ist z. B. die Querschnittskurve eine aus Kreis- und Geradenstücken zusammengesetzte, geschlossene Kurve.

Die Darstellung dieser allgemeinen Schraubenflächen bietet — wenigstens in einer zur Achse parallelen Bildebene — keine neuen prinzipiellen Schwierigkeiten. Man zeichnet die Querschnittskurve in hinreichend vielen Lagen und sucht Umriß sowie begrenzende Randkurven auf. Jener wird von den Fußpunkten der zur Bildebene lotrechten Tangenten (Umrißlote!) der Querschnittskurve gebildet und dieser durch die Bilder von End- oder Eckpunkten dieser Kurve. Der Leser möge sich dies am Beispiel der schiefen Schraubenlinie, wie sie aus der (begrenzten) Archimedischen Spirale entsteht, überlegen.

Siebentes Kapitel.

Axonometrie.

Wachsende Verbreitung findet eine Darstellungsmethode, bei der nur éin Bild eines Gegenstandes erscheint und bei der dies éine Bild genügt, um seine Abmessungen völlig zu kennzeichnen. Die Punkte des Gegenstandes werden dabei entweder ebenso wie bei der senkrechten Parallelprojektion durch Projektionslote auf die Bildebene abgebildet; oder aber durch Projektionsstrahlen, die einander parallel, aber geneigt zur Bildebene sind. Man unterscheidet dementsprechend *senkrechte und schiefe Axonometrie.*

Erinnert man sich an die im § 1 des ersten Kapitels angestellten Überlegungen, so erscheint es *paradox*, daß ein einziges Bild genügen soll, um über die Abmessungen des abgebildeten Körpers überhaupt etwas auszusagen. Der Widerspruch löst sich dadurch, daß jetzt vorausgesetzt wird, von dem darzustellenden Gegenstand seien gewisse Einzelheiten bereits bekannt.

§ 1. Senkrechte Axonometrie.

Wir bilden zunächst einen sehr einfachen und bekannten „Gegenstand" ab, nämlich ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz (Dreibein), bestehend aus x-, y-, und z-Achse, auf denen vom Nullpunkt aus die Längeneinheit abgetragen und dadurch die *Einheitspunkte* E markiert wurden. Bei senkrechter Parallelprojektion wird ein Bild der drei Achsen mit ihren Einheitspunkten entstehen, das eine gewisse Gesetzmäßigkeit aufweist, die wir zunächst untersuchen wollen.

Abb. 88 zeigt ein Dreibein mit dem Nullpunkt N und den Einheitspunkten E, sowie seine Abbildung auf die Bildebene b, in der drei vom Bilde des Nullpunktes auslaufende Gerade als Bilder der Achsen erscheinen. Die Durchstoßpunkte der Achsen durch die Bildebene bilden das sog. *Spurdreieck.* Durch den Nullpunkt im Raume und die drei Spurpunkte in der Bildebene denken wir uns eine Kugel gelegt. Aus dieser schneiden die drei Koordinatenebenen Kreise aus. Die Seiten des Spurdreiecks sind Durchmesser dieser Kreise.

Klappt man nun die Koordinatenebenen um die Seiten des Spurdreiecks in die Bildebene um, so entsteht Abb. 89. Sie zeigt (in senkrechter Parallelprojektion) die von N ausgehenden Bilder der Achsen, die senkrecht auf den Seiten des Spurdreiecks stehen müssen, weil im Raume jede Achse senkrecht auf einer Koordinatenebene steht und das Bild eines Lotes auf eine Ebene die Spur dieser Ebene senkrecht schneidet (S. 20). Die drei Um-

klappungen N_0 von N liegen auf den (verlängerten) Bildern der Achsen und auf Halbkreisen über den Seiten des Spurdreiecks als Durchmessern. In den drei Umklappungen erscheint jede Achse zweimal. Die auf den umgeklappten Achsen von N_0 aus abgetragenen Einheitsstrecken N_0E_0 erscheinen in wahrer Größe; ihre Endpunkte E können durch Zurückklappen auf die Achsenbilder übertragen werden.

Man kann (wie sogleich gezeigt werden wird) ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck als Spurdreieck wählen und das Bild des dadurch bestimmten Dreibeins einzeichnen. Die Höhen des Dreiecks sind die Bilder der Achsen, und der Höhenschnittpunkt ist das Bild des Nullpunktes. Um die Bilder der Einheitspunkte zu bekommen, schlägt man Halbkreise über den Dreiecksseiten und vervollständigt die Figur so, wie es Abb. 89 zeigt, indem man die Dreieckshöhen bis zu den Halbkreisen verlängert und die Schnittpunkte N_0 mit den Dreiecksecken verbindet. Diese Figur kann immer als Bild eines Dreibeins und der Umklappungen seiner Seitenflächen angesehen werden. Trägt man auf den von N_0 ausgehenden, umgeklappten Achsen überall die gleiche Strecke als Einheitslänge ab, so kann man die Endpunkte dieser Strecken auf die Bilder der Achsen übertragen.

Daß das Spurdreieck spitzwinklig sein muß, kann man analytisch erschließen, indem man darauf ausgeht, ein gegebenes Spurdreieck in ein Dreibein einzupassen. Dies kommt darauf hinaus, auf den Achsen eines Koordinatensystems je einen Punkt so zu suchen, daß die Abstände je zweier Punkte gleich den gegebenen Seitenlängen des Spurdreiecks werden. Nennen wir die Abstände der drei Punkte vom Nullpunkt ξ, η, ζ und die Seitenlängen des Spurdreiecks l_1, l_2, l_3, so führt diese Fragestellung auf drei Gleichungen für ξ, η, ζ nämlich

$$\eta^2 + \zeta^2 = l_1^2$$
$$\zeta^2 + \xi^2 = l_2^2$$
$$\xi^2 + \eta^2 = l_3^2,$$

die nur dann reelle Lösungen haben, wenn l_1, l_2, l_3 die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks sind.[1])

Das Bild eines Dreibeins können wir also zeichnen und umgekehrt aus dem vorschriftsmäßig gezeichneten Bilde eines solchen die Lage des zugehörigen Dreibeins im Raum finden.

1) Addiert man die mit -1 multiplizierte erste Gleichung zu den beiden anderen, so erhält man für ξ die Gleichung

$$2\xi^2 = l_2^2 + l_3^2 - l_1^2.$$

Die rechte Seite wäre Null, wenn l_1, l_2, l_3 ein rechtwinkliges Dreieck mit l_1 als Hypotenuse bildeten. Der Winkel zwischen l_2 und l_3 muß also spitz sein, wenn $\xi^2 > 0$ sein soll. Durch entsprechende Gleichungen findet man, daß alle Winkel des Spurdreiecks spitz sein müssen.

Allerdings bleibt dessen Abstand von der Bildebene unbestimmbar, wenn das Bild nur die Achsen mit ihren Einheitspunkten zeigt.

Wir fassen zusammen: Die Höhen eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks können als senkrechte Parallelprojektion eines Achsenkreuzes angesehen werden. Die Einheitsstrecken verkürzen sich bei dieser Abbildung in verschiedenem Maße, entsprechend der verschiedenen Neigung der Achsen zur Bildebene. Die *Verkürzungsverhältnisse* oder, mit anderen Worten, die Bilder der Einheitspunkte der Achsen werden konstruiert, wie soeben angegeben. Die Lage des Dreibeins im Raum kann demnach aus dem Spurdreieck konstruiert werden.

Was ist nun mit der Abbildung eines so speziellen Körpers, wie es ein Achsenkreuz ist, gewonnen? Nichts weniger als die *Abbildung beliebiger Körper*. Wir brauchen nämlich nur die Lage der Punkte eines solchen in einem fest mit ihm verbundenen Achsenkreuz erkennbar zu machen, um sie in der Abbildung des Achsenkreuzes wieder zu finden. Da dieses aus seiner Abbildung rekonstruierbar ist, kann dann auch die Lage der Punkte des Körpers im Raum dem Bilde entnommen werden.

Abb. 90a zeigt das Bild eines Achsenkreuzes und eines Punktes P. Die Lage des Punktes zu den Achsen ist hier aber nicht kenntlich gemacht, so daß aus diesem Bilde nichts über die Lage des Punktes zu den Achsen ausgesagt werden kann. Bildet man aber, wie in Abb. 90b, zugleich mit dem Punkte P eine Gerade ab, die vom Punkt P parallel zu einer Achse gezogen wurde, und ihren Durchstoßpunkt Q durch die dazu senkrechten Koordinatenebene, so ist die Lage des Punktes im Koordinatensystem erkennbar. Seine drei Koordinaten können gemessen werden, wenn man noch die gestrichelten Parallelen zu den beiden anderen Achsen zieht. Sowie also aus dem Bilde eines Gegenstandes mit einem Achsenkreuz die Lage seiner Punkte zu diesem Achsenkreuz hervorgeht, läßt ein Bild allein tatsächlich die Abmessungen des Gegenstandes ermitteln.

Das Achsenkreuz braucht als solches gar nicht in Erscheinung zu treten, wenn der Körper drei zueinander senkrechte Kanten hat, da diese als Koordinatenachsen angesehen werden können. So zeigt Abb. 91 das Bild des gefrästen Würfels, wie er in Abb. 32 dargestellt war, jetzt in senkrechter Axonometrie. Drei zusammenstoßende Würfelkanten bilden dabei ein Achsenkreuz, in dem die Schnittfigur ausgemessen werden kann.

Abb. 92 zeigt eine Kirche. Es ist auch der *Schatten* eingezeichnet, der bei parallel einfallenden Lichtstrahlen entsteht.

Um eine bestimmte Lichtrichtung in der fertigen Zeichnung der Kirche festzulegen, genügt es, den Schatten k' zu zeichnen, den eine senkrecht auf dem Boden stehende Kante k auf diesen wirft. Er führt vom Fußpunkt der Kante nach dem Spurpunkt L

des durch den oberen Endpunkt der Kante gelegten Lichtstrahls. Da die Bodenschatten aller senkrechten Geraden einander parallel sind, kann deren Schatten gezeichnet werden, wenn er von éiner bekannt ist.

Um den Schatten eines Punktes, z. B. den der oberen Ecke des Giebels, zu zeichnen, fällt man von ihm ein Lot auf den Boden und zeichnet den Schatten dieses Lotes. So ist der rechts auf dem Boden sichtbare Schatten von Dach und Turm entstanden.

Nun wirft der Turm noch Schatten auf das Dach. Die auf dem Boden punktiert gezeichnete Linie wäre der Schatten der einen (verlängerten) Turmkante, wenn der Turm allein existierte. Die Richtung dieses Schattens ist k' parallel. Die diesen Schatten bildenden Lichtstrahlen erfüllen eine senkrechte „Lichtebene", welche die Turmkante enthält. Diese Lichtebene schneidet die Giebelwand in der senkrechten punktierten Linie, und die ebenfalls punktierte Schnittlinie der Lichtebene mit der Dachfläche kann eingezeichnet werden. Diese Schnittlinie bildet den Schatten, den die Turmkante auf das Dach wirft. Läßt man vom oberen, durch einen Pfeil bezeichneten Endpunkt der senkrechten Kante einen Lichtstrahl ausgehen, so trifft dieser jene Schnittgerade im Schatten dieses Endpunktes und begrenzt den Schatten der Turmkante auf dem Dach.

Vom First des Turmdaches gehen Lichtstrahlen aus, welche eine geneigte Lichtebene bilden, die aus beiden Dachflächen des Langhauses je eine Gerade ausschneidet. Diese Geraden sind der Schatten des Firstes auf dem Dach. Um sie zu konstruieren, denken wir uns eine Ebene waagerecht durch die Traufkanten des Kirchendaches gelegt. Die in dieser Ebene senkrecht unter dem First des Turmes liegende Gerade ist strichpunktiert gezeichnet; man sieht sie aus der Turmwand heraustreten. Endlich verlängert man den First des Turmes und nimmt auf der Verlängerung irgendeinen Punkt F an, legt durch ihn einen Lichtstrahl und zeichnet damit den Schattenpunkt F_1, den F auf jene waagerechte Ebene durch die Traufkanten werfen würde. Durch diesen Schattenpunkt F_1 geht nun die Schnittgerade s_1, in welcher die durch den Turmfirst gelegte Lichtebene unsere waagerechte Ebene schneidet. Die Gerade s_1 muß, als Höhenlinie, dem Turmfirst parallel laufen und überdies die Traufkanten treffen.

Eine andere waagerechte Ebene denken wir uns durch den First des Kirchendaches gelegt. Sie liegt soviel über der waagerechten Ebene durch die Traufkanten, als der Dachfirst selbst darüber liegt. Diese Höhe h kann am Giebel abgegriffen und mit Hilfe dieses Maßes der Schatten F_2 des Punktes F in der durch den Dachfirst gelegten Horizontalebene ermittelt werden, wie es die Abb. 92 deutlich zeigt. (Es ist f_1' und f_2'' parallel k' gezogen.) Eine Parallele s_2 zum Turmfirst durch F_2 trifft den

Dachfirst, und dieser Treffpunkt T ist mit den Schnittpunkten von s_1 und den Traufkanten zu verbinden, um den Schnitt der Lichtebene des Turmfirstes mit dem Dach zu finden. Der Schatten vom linken Endpunkt des Turmfirstes muß nun auf einer dieser Schnittlinien liegen und wird durch den zugehörigen mit Pfeilen bezeichneten Lichtstrahl bestimmt.

Nun ist nur noch durch die Verbindung der beiden durch Pfeilspitzen bezeichneten Punkte auf dem Kirchendach der Schatten der schiefen Turmkante einzuzeichnen, und die Schattenkonstruktion ist fertig.[1])

§ 2. Schiefe Axonometrie. Vergleich beider.

Man kann ein Objekt auch dadurch abbilden, daß man von seinen Punkten parallele Strahlen bis zur Bildebene zieht, die *nicht* senkrecht darauf stehen. Allerdings muß man dann eigentlich das Bild in der Richtung dieser Projektionsstrahlen, also schräge, ansehen, um annähernd den gleichen Eindruck wie vom Objekt selbst zu erhalten.[2])

Bildet man ein Koordinatenkreuz in dieser Weise durch „schiefe Parallelprojektion" ab, so erhält man im allgemeinen als Bilder seiner Achsen drei vom Bilde des Nullpunktes ausgehende Gerade. Da auch bei dieser schiefen Parallelprojektion parallele Gerade parallele Bilder haben und Teilverhältnisse von Punkten auf einer Bildgeraden die gleichen sind, wie auf der Geraden selbst, bleibt das Prinzip der Axonometrie, ein auf ein Achsenkreuz bezogenes Objekt gleichzeitig mit diesem abzubilden, auch bei der neuen, schiefe Axonometrie genannten Abbildungsmethode erhalten. Man kann aber — und das ist bei schiefer Axonometrie die Regel — das Dreibein so annehmen, daß zwei seiner Achsen, etwa die x- und die z-Achse, in der Bildebene selbst liegen. Das Bild der y-Achse mit ihrem Einheitspunkt ist dann noch ganz willkürlich, weil stets eine entsprechende Projektionsrichtung gefunden werden kann. Man braucht dazu ja nur den Einheitspunkt auf dem Bilde der y-Achse mit dem im Raume liegenden Einheitspunkt durch eine Gerade zu verbinden, um die Projektionsrichtung zu erhalten.[3]) Die Annehmlichkeit, im

---

1) Wäre die Kirche im Grund- und Aufriß gegeben, so würde die Anweisung für die Schattenkonstruktion wörtlich die gleiche sein. Dem Anfänger wird die axonometrische Darstellung eher einleuchten als eine Zeichnung im Grund- und Aufriß.

2) Die Abb. 2 wäre entsprechend zu modifizieren.

3) Bei der *senkrechten* Axonometrie dagegen dürfte man keineswegs zwei Koordinatenachsen in die Bildebene legen oder zu ihr parallel annehmen, weil dann die dritte Achse sich als Punkt abbilden und die auf ihr gemessenen Koordinaten gar nicht in Erscheinung treten würden.

Bilde zwei Achsen aufeinander senkrecht zu haben, und alles, was in dieser Koordinatenebene und in allen dazu parallelen Raumebenen liegt, in wahrer Gestalt zeichnen zu können, ist ein großer zeichentechnischer Vorteil der schiefen Axonometrie; ihr Hauptnachteil, daß man ihre Bilder eigentlich schief ansehen muß, um einen annähernd richtigen Eindruck des dargestellten Objekts zu bekommen. Da natürlich niemand ein Bild schief ansieht, muß ein verzerrter Eindruck vom Objekt bei schiefer Axonometrie in Kauf genommen werden.

Ein *Beispiel* mag zeigen, wie man in schiefer Axonometrie konstruiert. In Abb. 93 liegen x- und z-Achse in der Bildebene, und die positive y-Achse weist in den Raum dahinter. Ihr Bild mit dem Einheitspunkt E ist willkürlich angenommen. Nun ist eine Ebene e durch das von den Achsen ausgestochene Dreieck dargestellt, und es soll das vom Nullpunkt N auf die Ebene e gefällte Lot eingezeichnet werden.

Denkt man sich dies Lot l im Raume senkrecht auf die xz-Ebene projiziert (also durch Projektionsstrahlen, die der y-Achse parallel sind), so gilt der Satz von S. 20, daß die Projektion p des Lotes auf der Spur s, in welcher die Ebene e die xz-Ebene schneidet, senkrecht stehen muß. Da wir die xz-Ebene in der Zeichenebene selbst vor uns haben, können wir die Projektion p des Lotes sogleich senkrecht zur Spur s einzeichnen. Die durch das Lot l selbst und die y-Achse gehende Ebene, die auch p enthält, schneidet die Ebene e in einer Geraden q, die wir bereits einzeichnen können, und auf der auch der Durchstoßpunkt D des Lotes l durch die Ebene e liegen muß.

Denken wir uns ferner im Raume das Lot senkrecht auf die xy-Ebene projiziert, so steht zwar im Raume diese Projektion r senkrecht auf der Spur t der Ebene e, nicht aber in der Zeichnung. Nun denken wir uns im Raume die xy-Ebene um die x-Achse in die Bildebene nach unten hineingeklappt. Dann haben wir sie ebenfalls in unserer Zeichenebene und können darin konstruieren. Abb. 94 zeigt in der altgewohnten senkrechten Parallelprojektion diese Umklappung in einer Aufrißebene, die senkrecht zur x-Achse gedacht ist. Der Einheitspunkt E der y-Achse wandert bei der Umklappung auf einem Kreis um die Klappachse x nach E_0 und ebenso ein anderer Punkt P der xy-Ebene nach P_0. Verbinden wir nun jeden Punkt mit seiner Umklappung durch eine Gerade, so sind diese Geraden alle parallel.

Diese Verbindungsgeraden bilden wir nun im axonometrischen Bilde selbst ab und stellen dadurch die Umklappung dar. Die y-Achse kommt nach der Umklappung in die Verlängerung der z-Achse nach unten zu liegen und ist als y_0 strichpunktiert gezeichnet. Ihr Einheitspunkt E kommt nach E_0 und dieser Punkt ist vom Nullpunkt N um die Einheitsstrecke, die auf den an-

deren beiden Achsen durch einen Teilstrich bezeichnet ist, entfernt. Verbinden wir nun das Bild E des Einheitspunktes, das auf dem Bilde der y-Achse liegt mit der Umklappung E_0, so haben wir éine der Verbindungsgeraden, die von den Punkten der xy-Ebene zu ihren Umklappungen führen, im axonometrischen Bilde dargestellt.

Da alle anderen dazu parallel sind, können wir jetzt — auch im Bilde — alle Punkte der xy-Ebene herunterklappen. Wir tun dies mit dem Punkte Y, in dem die Ebene e von der y-Achse durchstochen wird. Seine Umklappung Y_0 muß auf der bereits vorhandenen Umklappung y_0 der y-Achse liegen und wird durch eine Parallele YY_0 zu EE_0 bestimmt. Da der Punkt X bei der Umklappung auf der Klappachse liegen bleibt, ist durch Y_0X auch die Umklappung der Spur t nach t_0 erledigt.

In der heruntergeklappten xy-Ebene wird nun r_0 von N aus senkrecht zu t_0 gezogen und der Schnittpunkt R_0 nach R zurückgeklappt, womit das Bild der senkrechten Projektion r des Lotes l auf die xy-Ebene gefunden ist. Die (im Raume) durch r und die z-Achse gelegte Ebene schneidet die Ebene e in einer Geraden m, welche die entsprechende, vorher gezeichnete Gerade q im Durchstoßpunkte D des Lotes trifft, womit die gestellte Aufgabe erledigt ist.

Dieses einfache Umklappungsprinzip[1]), das die gewohnten Methoden vom Zeichnen im Grund- und Aufriß in die Axonometrie zu übertragen erlaubt, könnte auch bei der senkrechten Axonometrie benutzt werden. In der Abb. 89 sind ja in der Tat die Koordinatenebenen in die Zeichenebene hineingeklappt. Doch werden die Konstruktionen bei senkrechter Axonometrie schwerfälliger als bei schiefer.

Abb. 95 zeigt die *Durchdringung von Kreiszylindern* in schiefer Axonometrie. Der Grundkreis des senkrechten Zylinders um die z-Achse erscheint als Ellipse in der xy-Ebene, und die x- sowie y-Achse sind konjugierte Durchmesser. Auf der x-Achse ist dabei der Durchmesser des Zylinders in wahrer Größe aufzutragen; auf der y-Achse entsprechend der dort gewählten Einheitsstrecke. Die Höhe des Zylinders erscheint ebenfalls in wahrer Größe.

Die Achse des kleinen Zylinders links ist der y-Achse parallel und seine Stirnfläche erscheint daher als Kreis. Die Durchdringungskurve beider Zylinder konstruiert man durch Schnitte mit Hilfsebenen parallel zur yz-Ebene.

Die Achse des geneigten Zylinders liegt in der xz-Ebene; seine Länge und Neigung erscheint daher in wahrer Größe. Sein Durchmesser ist der gleiche wie der des senkrechten Zy-

1) Es ist ebenso möglich, die yz-Ebene um die z-Achse in die Zeichenebene zu klappen.

linders. Die Durchdringungskurve besteht also (vgl. S. 59 u. Abb. 61) aus zwei Ellipsen. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt M der Zylinderachsen. Die beiden Ellipsen gemeinsame Hauptachse steht in M senkrecht auf der xz-Ebene. Die beiden anderen Hauptachsen liegen in der xz-Ebene. Ihre Endpunkte erhält man als Schnittpunkte der in der xz-Ebene liegenden Mantellinien beider Zylinder. Bei dem geneigten Zylinder gehen diese Mantellinien von den Endpunkten desjenigen Durchmessers r aus, welcher in der (zur Achse senkrechten) Stirnfläche des Zylinders liegt und welcher im Bilde senkrecht zur Zylinderachse und in natürlicher Größe erscheint. Die Hauptachsen der Durchdringungsellipsen im Raum erscheinen im axonometrischen Bilde als konjugierte Durchmesser.[1]) Die Ellipsen sind auszuziehen bis zu denjenigen Umrißmantellinien des schrägen Zylinders, die als Tangenten an die Ellipse zu ziehen sind, welche den Stirnkreis darstellt. Die Abb. 95 gibt bei senkrechter Betrachtung allerdings ein recht verzerrtes Bild der drei Zylinder. Der Leser ermittle die schiefe Projektionsrichtung, in der die Abbildung eigentlich anzusehen ist und wird finden, daß bei Betrachtung in dieser Richtung der Eindruck der Verzerrung verschwindet.[2])

Unerträglich wird die, praktisch natürlich unvermeidliche, Verzerrung des schiefaxonometrischen Bildes bei der *Darstellung einer Kugel.* Deren Umriß in der Bildebene wird nämlich eine Ellipse! Dies ist leicht einzusehen, denn die Projektionsstrahlen, welche die Kugel berühren und ihr Bild, d. h. ihren Umriß liefern, bilden im Raume einen Kreiszylinder, der zur Bildebene geneigt liegt und diese in einer Ellipse schneidet. Abb. 96 zeigt das Unglück. Die von den xy- und yz-Koordinatenebenen aus einer um N beschriebenen Kugel ausgeschnittenen Kreise erscheinen als Ellipsen und der Schnitt mit der xz-Ebene als Kreis. Die Umrißellipse der Kugel berührt alle drei Kurven je zweimal.

Die kleine Hauptachse r dieser Umrißellipse steht auf dem Bild der y-Achse senkrecht und ist gleich dem Kugeldurchmesser. Die Endpunkte der großen Halbachse finden wir so: Wir drehen die kleine Hauptachse r um das Bild der y-Achse um 90^0. Sie steht dann senkrecht zur Bildebene und fällt im Raum mit der y-Achse zusammen. Verbinden wir nach dieser Drehung den Endpunkt von r mit demjenigen Punkte R auf dem Bilde der y-

---

1) Dies Beispiel zeigt wieder einmal, wie nützlich die Theorie ist, die uns hier lehrt, daß die Durchdringungskurve aus Ellipsen besteht.

2) Diese Projektionsrichtung bekommt man etwa dadurch, daß man einen Bleistift im Nullpunkt senkrecht auf die Zeichenebene setzt und die Länge r auf ihm markiert. Die Blickrichtung geht dann durch den so markierten Punkt des Bleistiftes und den linken Endpunkt des y-Durchmessers der Grundkreisellipse.

Achse, den man erhält, wenn man vom Nullpunkt N aus im Maßstab des Bildes der y-Achse den Kugelradius abträgt, so ist im Raume diese Verbindungsgerade p gerade die schiefe Projektionsrichtung (vgl. S. 95, Anm. 2).

Nun denken wir uns im Raume parallel zur Projektionsrichtung p diejenige Tangente t an die Kugel gelegt, welche die y-Achse im Punkte T schneidet. Stellt man sich ferner eine Ebene vor, die auf der Bildebene senkrecht steht und sie im Bilde der y-Achse schneidet, so liegen in dieser Normalebene: Die y-Achse im Raume; zusammen mit dieser die aufgedrehte Hauptachse r; das Bild der y-Achse in der Bildebene; die Verbindungsgerade (Projektionsrichtung) p und, parallel dazu, die Tangente t. Diese Tangente berührt denjenigen Kreis, den die Normalebene aus der Kugel ausschneidet. Jetzt klappen wir die Normalebene um das Bild der y-Achse in die Bildebene um. Die Hauptachse r kommt dabei in ihre alte Lage; die Umklappung p_0 der Projektionsrichtung führt vom Endpunkte von r nach R. Der zuletzt erwähnte Schnittkreis fällt bei der Umklappung in den xz-Kreis der Kugel. Die Umklappung t_0 der Tangente wird zu p_0 parallel, berührt den xz-Kreis und schneidet das Bild der y-Achse im Punkte T. Dies ist der gesuchte Endpunkt der großen Hauptachse von der Umrißellipse der Kugel. Die Zeichnung dieses Endpunktes ist also ganz einfach: Man zeichnet zuerst r, dann p_0 und endlich die dazu parallele Tangente t_0. Die Einsicht in die Konstruktion erfordert aber eine gewisse Raumanschauung, über die der Leser jetzt hoffentlich verfügt.

Das doch recht absonderliche elliptische Bild einer Kugel in schiefer Axonometrie hat diese vielfach in Mißkredit gebracht. Wenn eine Kugel abzubilden ist, so ist die schiefe Axonometrie in der Tat nicht angebracht. Allerdings kann man sie mit etwas „Mogeln" auch dann noch benutzen, wenn zu dem dargestellten Objekt zwar Kugeln gehören, aber keine wichtige Rolle spielen. So zeigt z. B. Abb. 97 einen in schiefer Axonometrie dargestellten Regulator, dessen Kugeln unbedenklich als Kreise gezeichnet wurden, obwohl dies an sich falsch ist. Es schadet hier aber nichts. Ist die Kugel dagegen die Hauptsache, etwa bei der Abbildung der Erdkugel oder eines kugelförmigen Ventilgehäuses, so wäre es in der Tat sehr ungeschickt, schiefe Axonometrie zu benutzen.

Um Rohrleitungen in schiefer Axonometrie darzustellen, müßte man ihren Umriß als Umhüllungskurve von Ellipsen zeichnen; denn als solche erscheinen jetzt die Umrisse der durch das Rohr gleitenden Kugel (vgl. Kap. V). Bei nicht geradlinigem Bilde der Rohrachse würde der Umriß des Rohres also auch bei konstantem Rohrquerschnitt wechselnde Breite bekommen und unwahrscheinlich wirken. Man wird daher Rohrleitungen, ebenso

wie Kugeln, in senkrechter Axonometrie darstellen, wo der Umriß jeder Kugel ein Kreis ist.

Ein *Nachteil der senkrechten Axonometrie* liegt darin, daß deren Bilder eine senkrechte Hauptkante des Körpers nie als parallel zur Bildebene dargestellt empfinden lassen. Man ist aber gewohnt, die Bildebene als Vertikalebene aufzufassen, und empfindet infolgedessen den in senkrechter Axonometrie dargestellten Gegenstand als schief im Raume stehend. Zwingt man sich zu der Vorstellung einer geneigten Bildebene und entsprechender Blickrichtung, so gewinnt man eine schräge Draufsicht (Vogelperspektive), die wiederum ungewohnt ist. Die schiefe Axonometrie gibt dagegen bei senkrecht vorgestellter Bildebene den Eindruck des senkrecht stehenden Gegenstandes. Man vergleiche die Abb. 92 und 95. Ob die Verzerrung bei schiefer Axonometrie diesen Vorteil wieder wett macht, ist letzten Endes Geschmackssache. Ich meine, daß, abgesehen von der Darstellung von Kugeln, im allgemeinen die schiefe Axonometrie den Vorzug verdient, und habe daher, wie der Leser jetzt erkennen wird, bei den erläuternden Abb. 1, 3, 7, 11, 21, 26, 88 von ihr Gebrauch gemacht. Abb. 98 zeigt die einer Zeitschrift entnommene schief-axonometrische Darstellung einer Schaltvorrichtung.

Achtes Kapitel.

Abriß der Zentralperspektive.

§ 1. Allgemeines Prinzip und die Abbildung von Punkten.

Aus dem umfangreichen Gebiet der Geometrie, das als Zentralprojektion bezeichnet wird, kann hier nur ein kleiner Teil behandelt werden. Ohne einen Einblick in diesen Gedankenkreis würde aber das Studium der darstellenden Geometrie unvollkommen bleiben. Denn nur die perspektivische Darstellung gibt verzerrungsfreie und daher besonders eindrucksvolle Bilder, weshalb z. B. die ästhetische Wirkung von geplanten Bauwerken am besten aus perspektivischen Ansichten beurteilt werden kann.

Der *Grundgedanke der Perspektive* ist recht einfach: Es wird eine *Bildebene* b und ein *Projektionszentrum* C angenommen (Abb. 99). Jeder abzubildende Raumpunkt P wird mit diesem Zentrum C durch eine Gerade, einen sog. Projektionsstrahl, verbunden, und der Durchstoßpunkt P' dieses Strahles durch die Bildebene ist das Bild des Raumpunktes.

Eine ganze Reihe von geometrisch oder zeichentechnisch wichtigen Anmerkungen sind aber dabei zu machen. Um die Lage des Zentrums C zur Bildebene festzulegen, ist es üblich, von C

aus ein Lot auf die Bildebene zu fällen (in der Abbildung strichpunktiert) und den Treffpunkt H zu markieren. Er wird *Hauptpunkt* genannt und die Länge $CH = d$ dieses Lotes die *Distanz*. Durch Einzeichnen des Hauptpunktes H in die Bildebene und Angabe der Distanz ist die Lage des Zentrums C bestimmt. Die *photographische Abbildung* ist auch eine Zentralprojektion. Die Bildebene ist die Platte, das Zentrum der optische Mittelpunkt des Linsensystems. Die Distanz wird hier als Brennweite bezeichnet. Das Lot CH ist die optische Achse der Aufnahme; wir wollen es allgemein als *Achse der perspektivischen Abbildung* bezeichnen.

Ändert man bei einer perspektivischen Abbildung nur die Distanz, indem man verschiedene einander *parallele Bildebenen* benutzt, so erhält man verschiedene Bilder eines Objekts, die einander ähnlich sind. Für die Abbildung kommt es daher hauptsächlich auf die Lage des Zentrums und der Achse relativ zum Objekt an. Die Distanz bestimmt dann nur noch den Maßstab des Bildes. Aus dem mit éiner Distanz gezeichneten Bilde können alle zu anderen Distanzen gehörenden durch ähnliche Verkleinerung oder Vergrößerung abgeleitet werden.

Bringt man beim *Betrachten eines perspektivischen Bildes* das Auge an die Stelle des Zentrums, so bewirken die von den Bildpunkten nach dem Auge laufenden Lichtstrahlen auf dessen Netzhaut geometrisch genau die gleichen Eindrücke wie sie beim Betrachten des Objekts selbst entstehen würden, wenn man es vom Punkte C anblickte. Dies ist der Grund für die eindrucksvolle Wirkung perspektivischer Bilder (vgl. Abb. 2). Diese Wirkung bleibt allerdings aus, wenn das betrachtende Auge nicht die richtige Stellung zur Bildebene hat. Bei der kleinen Brennweite der üblichen photographischen Apparate pflegt man deren Bilder aus zu großer Entfernung anzusehen. Benutzt man jedoch ein Vergrößerungsglas, so ist dies gleichwertig mit einer Vergrößerung der Photographie, die wiederum einer Aufnahme mit größerer Distanz entspricht, so daß sich dieser der Abstand des Auges leicht anpassen läßt. Man ist überrascht, wie plastisch die solcherweise angeschaute Abbildung wirkt. Bei der *zeichnerischen Herstellung perspektivischer Bilder* muß man durchaus darauf achten, eine Distanz zugrunde zu legen, die eine Betrachtung ohne Akkomodationsschwierigkeiten ermöglicht, wenn der Vorteil besonderer Anschaulichkeit nicht ausbleiben soll.

Eine *geometrische Eigentümlichkeit* der Zentralprojektion ist es, daß sie nicht zu allen Raumpunkten Bildpunkte liefert. Denkt man sich nämlich durch das Zentrum eine zur Bildebene parallele Ebene gelegt — sie wird „*Verschwindungsebene*“ genannt —, so gibt es zu deren Punkten keine Bildpunkte, da die Projektionsstrahlen dieser Raumpunkte parallel der Bildebene laufen.

Praktische Bedeutung hat diese Einschränkung nicht. Bedenklicher scheint die Bemerkung zu sein, daß es offenbar unmöglich ist, aus einer einzigen perspektivischen Abbildung etwas über die Form und Abmessungen des abgebildeten Gegenstandes auszusagen. Von jedem Raumpunkte kann man nur angeben, daß er auf einem gewissen Projektionsstrahl liegt, aber nicht an welcher Stelle.

Sofern man aber über Einzelheiten der Form des Gegenstandes Kenntnisse hat und z. B. annehmen kann, daß bei einem Gebäude senkrechte und waagerechte Kanten und Ebenen vorhanden sind, die sich vielleicht noch unter bekannten Winkeln schneiden, so genügt eine einzige Abbildung, um eine in vielen Fällen ausreichende Vorstellung von der Form zu geben. (Vgl. dasselbe Prinzip der Axonometrie S. 88.)[1]) Da die Perspektive in den meisten Fällen zur Darstellung von Bauwerken dient, ist diese Voraussetzung erfüllt. Es ist üblich, die Bildebene senkrecht anzunehmen.[2])

§ 2. Abbildung von geraden Linien. Fluchtpunkte. Horizont.

In Abb. 100 ist die senkrecht stehende Bildebene und das Zentrum C (in axonometrischer Darstellung) skizziert. Schließen wir zunächst zur Bildebene parallele Geraden aus, so trifft jede Gerade die Bildebene in einem Spurpunkt S. Da jeder in der Bildebene selbst liegende Raumpunkt mit seinem Bildpunkt zusammenfällt, ist der Spurpunkt einer Geraden auch ein Punkt ihres Bildes. Bei Geraden, die durch das Zentrum gehen, besteht das ganze Bild allein aus diesem Spurpunkt.

Sonst bilden die zu den Punkten einer Geraden führenden Projektionsstrahlen eine „projizierende Ebene", welche die Bildebene in einer Geraden schneidet, die das Bild der Raumgeraden ist. In dieser projizierenden Ebene kann man durch das Zentrum C eine Parallele zu der gegebenen Raumgeraden ziehen. Der Schnittpunkt F dieser Parallelen mit der Bildebene wird der *Fluchtpunkt* der gegebenen Geraden genannt. Ihr Bild ist die Verbindungslinie von Spur- und Fluchtpunkt.

Denkt man sich auf der Geraden einen Punkt P wandernd und beobachtet seinen Bildpunkt P', so bewegt sich dieser auf der Bildgeraden vom Spurpunkt nach dem Fluchtpunkt zu, wenn der Punkt P vom Spurpunkt in den Raum hinein wandert. Der Fluchtpunkt ist die Grenzlage des Bildpunktes, d. h. der Bild-

---

1) Ist das abgebildete Objekt gänzlich unbekannt, so müssen mindestens zwei Bilder vorhanden sein, um seine Abmessungen zu ermitteln. In der *Photogrammetrie* wird gezeigt, wie dies gemacht wird.

2) Bei Photoapparaten dient vielfach eine Dosenlibelle zur Senkrechtstellung der Bildebene.

punkt kommt dem Fluchtpunkt beliebig nahe, wenn der Punkt P hinreichend weit in den Raum hinausgewandert ist. Man drückt dies bisweilen auch so aus, daß man den Fluchtpunkt als den Bildpunkt des unendlich fernen Punktes der Geraden bezeichnet.[1])

Das Bild einer Geraden ist also einfach zu zeichnen: Man zieht durch das Zentrum C eine Parallele zu ihr und findet ihren Fluchtpunkt F als Durchstoßpunkt dieser Parallelen durch die Bildebene. Dann verbindet man den Spurpunkt S mit dem Fluchtpunkt F und hat mit dieser Verbindungslinie das Bild der Geraden gefunden.

Aus dieser Überlegung folgt unmittelbar der Satz, daß *parallele Gerade* einen *gemeinsamen Fluchtpunkt* haben, wie es die Abb. 100 für zwei Gerade g_1 und g_2 zeigt.

Würden die Raumgeraden über ihre Spurpunkte S hinaus (nach vorne) verlängert werden, so müßten die Bildgeraden ebenfalls über S verlängert werden. Der Durchstoßpunkt einer Raumgeraden durch die Verschwindungsebene ist insofern auch ein Grenzpunkt, als sein Bildpunkt „ins Unendliche" fällt.[2])

In der Abb. 100 ist der Raumpunkt P in einer solchen Lage gezeichnet, daß sein Bildpunkt P' gerade in der Mitte zwischen dem Spurpunkt S und dem Fluchtpunkt F liegt. Man sieht sofort, daß bei der perspektivischen Abbildung einer Geraden das *Teilverhältnis* von drei Punkten auf ihr *nicht erhalten* bleibt. Denkt man sich nämlich auf der Geraden g_1 noch einen Punkt Q in hinreichend weiter Entfernung, so wird sein Bildpunkt Q' beliebig nahe beim Fluchtpunkt F liegen. Das Teilverhältnis $\frac{S_1 P}{PQ}$ der drei Punkte auf der Raumgeraden ist um so weniger von Null verschieden, je weiter der Punkt Q entfernt ist. Das entsprechende Teilverhältnis $\frac{S_1 P'}{P'Q'}$ der Bildpunkte ist aber beliebig

1) Damit will man nicht irgend etwas Geheimnisvolles über das Unendliche aussagen, sondern nur das, was wir vorher durch das Wort „Grenzlage" präziser ausgedrückt haben. Das Wort *Unendlich* braucht in der ganzen Mathematik überhaupt nicht benutzt zu werden. Es ist lediglich eine abkürzende und daher bequeme Ausdrucksweise unter Sachverständigen. Bei anderen Leuten pflegt es Konfusion zu bewirken.

2) Der Leser denke sich einmal den Punkt P die ganze Gerade von einem bis zum anderen „Ende" durchlaufend und verfolge den Bildpunkt P' dabei. Auch dieser durchläuft die unbegrenzt zu denkende Bildgerade. Man sieht aber, daß die Verlängerung der Bildgeraden über den Fluchtpunkt F hinaus nur geometrisch einen Sinn hat und für die Abbildung wirklicher Gegenstände nicht in Frage kommt.

wenig von Eins verschieden, wenn Q weit genug (und somit Q' entsprechend nahe bei F) liegt.[1])

Es bleibt noch zu überlegen, wie sich *zur Bildebene parallele Gerade* abbilden. In Abb. 101 ist außer der Bildebene b noch eine waagerechte Ebene w gezeichnet und eine auf dieser senkrecht stehende Gerade. Die projizierenden Strahlen der Punkte dieser Geraden bilden eine senkrechte Ebene, welche die Bildebene in einer senkrechten Bildgeraden schneidet. Ganz allgemein gilt der Satz, daß die Bilder von zur Bildebene parallelen Geraden diesen parallel sind. Für solche Gerade bleibt auch das Teilverhältnis von drei Punkten bei der perspektivischen Abbildung erhalten, was man aus der Abb. 101 ablesen kann.

Bei der *Darstellung von Bauwerken* hat man es viel mit Gruppen von Geraden zu tun, die in éiner waagerechten Ebene liegen. Abb. 102 zeigt eine *waagerechte Ebene*, in der zwei Geraden g_1 und g_2 liegen. Diese Ebene schneidet die Bildebene in einer *Spurlinie s*, und auf dieser Spurlinie liegen die Spurpunkte aller Geraden, die in der waagerechten Ebene liegen. Die Fluchtpunkte aller waagerechten Geraden überhaupt liegen auf einer waagerechten Geraden der Bildebene, die durch den Hauptpunkt H geht und *Horizont* genannt wird. In der Tat liegen ja diejenigen Strahlen, die durch das Zentrum C parallel zu waagerechten Geraden gezogen werden und deren Fluchtpunkte liefern, in einer waagerechten, durch C gehenden Ebene, welche die Bildebene im Horizont schneidet.

In der Abb. 102 ist senkrecht über der Geraden g_2 noch eine waagerechte Gerade g_3 angenommen. Ihr Bild geht ebenfalls durch den Fluchtpunkt F_2. Drei zwischen g_2 und g_3 stehende Lote sind mit abgebildet.

§ 3. Perspektivische Abbildung eines in Grund- und Aufriß gegebenen Hauses. Kellergrundriß.

Die wenigen in den ersten beiden Paragraphen entwickelten Begriffe und Sätze genügen, um einen Gegenstand perspektivisch abzubilden, der in Grund- und Aufriß dargestellt ist. Abb. 103 zeigt ein Haus im Grundriß und zwei Ansichten. In den Dachflächen sind zwei Sparren hervorgehoben.

1) Nimmt man dagegen auf einer Geraden *vier Punkte* $A\ B\ C\ D$ an und bildet den Quotienten zweier Teilverhältnisse, etwa $\frac{AB/CB}{AD/CD}$, was man ein *Doppelverhältnis* der vier Punkte nennt, so läßt sich zeigen, daß das entsprechende Doppelverhältnis der vier Bildpunkte $A'\ B'\ C'\ D'$ nämlich $\frac{A'B'/C'B'}{A'D'/C'D'}$, den gleichen Wert bekommt.

Zunächst ist die *Wahl des Zentrums und der Achse* der Perspektive zu treffen. Es ist die gleiche Überlegung, von welcher Stelle aus und in welcher Richtung man das Gebäude etwa photographieren wollte. Durch C^* und C' ist das Zentrum in Grund- und Aufriß angegeben. Mit h ist seine Höhe über dem Erdboden bezeichnet. Die Achse d ist waagerecht, und es genügt, sie (strichpunktiert) in den Grundriß einzuzeichnen. Je nach der Wahl des Aufnahmestandortes C und der Richtung von d erhält man verschiedene Ansichten, aus denen die für den jeweiligen Zweck geeignete auszusuchen ist. Dabei ist es wieder einmal sehr gut, wenn man sich das Gebäude räumlich vorstellen und seinen Eindruck auf einen sein Auge in C haltenden und in der Richtung d blickenden Beobachter abschätzen kann. Es gilt als Regel, daß C um mehr als die doppelte Gebäudehöhe vom Bauwerk entfernt anzunehmen ist.

Die *Bildebene* wird senkrecht zur Achse, also auch senkrecht zur Grundrißebene, angenommen. Sie erscheint demnach im Grundriß als Gerade b. Die Distanz d, die der Grundriß in wahrer Länge zeigt, bestimmt nun die Größe des perspektivischen Bildes. Diese kann aber später jederzeit durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung geändert werden.

Es bedeutet eine Ersparnis an Zeichenarbeit, wenn man die Bildebene durch eine der senkrechten Kanten des Gebäudes legt, da man dann auf dieser Kante die Maße aus dem Aufriß ungeändert abtragen kann. In unserem Beispiel ist die Bildebene durch die Kante 1 gelegt.

Um die *waagerechten Kanten* des Gebäudes abzubilden, werden wir deren Spur- und Fluchtpunkte brauchen. Die Spurpunkte findet man im Grundriß durch Verlängerung der waagerechten Kanten und die Fluchtpunkte durch Strahlen, die man parallel zu diesen Kanten durch das Zentrum C zieht. Die Grundrisse der Fluchtpunkte sind F_I^* und F_{II}^*, und diese selbst liegen darüber auf dem Horizont, also in der Höhe h über dem Erdboden. Die *geneigten Kanten* und die Sparren der vorderen Hälfte des Daches haben einen Fluchtpunkt F_{III}, der gefunden wird, indem man durch C eine Parallele zu diesen Linien des Daches zieht. Diese Parallele ist zur Darstellung gebracht in einer Aufrißebene, die durch C und F_I gelegt und um CF_I nach links umgeklappt wurde. Der Neigungswinkel α des Daches ist der Seitenansicht entnommen. Die Umklappung zeigt dann das Stück f, um das der Fluchtpunkt F_{III} der Sparren über dem Fluchtpunkt F_I liegt.

Die Abb. 104 zeigt nun die Bildebene selbst sowie die darin vorgenommenen Konstruktionen. Man beginnt mit dem (strichpunktierten) Horizont, auf dem man den Hauptpunkt H markiert. Die Fluchtpunkte F_I und F_{II} überträgt man aus der Abb. 103 auf den Horizont. Der Erdboden schneidet die Bildebene in einer

Spurlinie s, die parallel zum Horizont und um das Stück h, das dem Aufriß in der Abb. 103 zu entnehmen ist, unter ihm verläuft. Auf dieser Spurlinie liegen die Spurpunkte S_{23} und S_{34} der im Erdboden liegenden Gebäudekanten 2 3 und 3 4. Der Grundriß in Abb. 103 läßt abgreifen, um wieviel diese beiden Spurpunkte rechts und links vom Hauptpunkte H liegen. Zweckmäßig nimmt man in der Bildebene (d. h. der Abb. 104) auf der Spurlinie s genau unter dem Hauptpunkt H einen Nullpunkt N an, von dem aus die der Abb. 103 zu entnehmenden Maße abgetragen werden. Natürlich überträgt man diese Maße nicht einzeln, sondern gemeinsam durch einen Papierstreifen!

Um wieviel die senkrechte Kante 1 rechts vom Hauptpunkt liegt, kann man dem Grundriß in Abb. 103 entnehmen und nach Übertragen dieses Maßes die Kante 1 in die Bildebene einzeichnen. Ihre Höhe entnimmt man dabei dem Aufriß der Abb. 103.

Die im Erdboden liegende Kante 1 2 kann jetzt in der Bildebene gezeichnet werden. Ihr Bild muß von dem unteren Eckpunkt der Kante 1 ausgehen und nach dem Fluchtpunkte F_{II} führen. Ebenso läßt sich das Bild der im Erdboden liegenden Kante 1 4, nach F_{I} führend, einzeichnen.

Um die Erdbodenkante 2 3 abzubilden, müßten wir deren Spurpunkt S_{23} mit dem Fluchtpunkt F_{I} verbinden. Das Bild dieser Kante 2 3 brauchen wir allerdings nicht; es könnte aber dazu dienen, den Punkt 2 auf dem Erdboden, d. h. die Länge der Erdbodenkante 1 2 zu bestimmen.

Ebenso wird man vielleicht durch die Erdbodenkante 3 4 die Ecke 4 zu finden suchen. Es liegt ja sehr nahe, in dieser Weise den ganzen im Erdboden liegenden Grundriß eines Gebäudes in die perspektivische Ansicht zu übertragen und sodann in den Eckpunkten des Grundrisses die senkrechten Kanten, deren Bilder ja auch senkrecht sind, zu errichten. Wollte man nun aber den Spurpunkt S_{23} mit F_{I} verbinden und den Schnitt 2 dieser Linie mit der von der Ecke 1 nach F_{II} führenden bestimmen, so würde dies sehr ungenau ausfallen, weil die beiden nach F_{I} und F_{II} führenden Linien sich unter einem zu kleinen Winkel schneiden.

Der ganze im Erdboden liegende Grundriß des Hauses muß im perspektivischen Bilde zwischen der Erdbodenspur s und dem Horizont Platz finden, und es verspricht wenig Erfolg, an dem in diesem engen Raum liegenden Grundrißbilde irgendwelche Konstruktionen vorzunehmen. Je kleiner die Höhe h des Zentrums C über dem Erdboden gewählt war, um so schmaler wird der Zwischenraum zwischen der Spur s und dem Horizont. Diese beiden Linien würden zusammenfallen, wenn C im Erdboden läge. Dann ist eine perspektivische Konstruktion an dem im Erdboden liegenden Grundriß überhaupt unmöglich, da er als Gerade erscheint.

Man hilft sich nun so, daß man unterhalb des Erdbodens eine *neue Grundrißebene* annimmt, wie es in der Giebelansicht der Abb. 103 angedeutet ist, und überträgt deren Spurlinie σ in die perspektivische Abbildung. Die senkrechten Kanten des Hauses denkt man sich bis zu dieser neuen Grundrißebene nach unten verlängert, so daß hier ein zu dem im Erdboden liegenden kongruenter Grundriß entsteht. Seine Umrißlinien treffen die Spurlinie σ in den Spurpunkten (S_{23}) und (S_{34}), die unter den auf s befindlichen liegen.[1])

Durch Verbinden der neuen Spurpunkte auf σ mit den Fluchtpunkten erhält man das Bild des neuen, tiefer liegenden Grundrisses, der als *Kellergrundriß* bezeichnet wird. Das Stück k, um das dieser Kellergrundriß tiefer als der zuerst benutzte liegt, ist willkürlich und wird so groß gewählt, daß man im Kellergrundriß genau konstruieren kann. Die Spurlinie s des Erdbodens braucht gar nicht gezeichnet zu werden.

In Abb. 104 ist der Kellergrundriß ausgezogen, und in seinen Ecken werden die senkrechten Gebäudekanten errichtet. Auf der Kante 1 wird von σ aus zuerst das Stück k und anschließend die Länge der Kante selbst, wie sie dem Aufriß entnommen wird, abgetragen. Dadurch erhält man die Endpunkte der Kante 1, die nun mit den Fluchtpunkten zu verbinden sind. In den jetzt genau bestimmten Eckpunkten des Kellergrundrisses errichtet man Lote und erhält dadurch die senkrechten Kanten. Den Spurpunkt S_f des Dachfirstes überträgt man von der Abb. 103 in die Abb. 104. Seine Verbindung mit dem Fluchtpunkt F_{II} gibt das Bild des Firstes. Dessen Endpunkte erhält man durch die nach dem Fluchtpunkt F_{III} laufenden Bilder der geneigten Dachkanten. Oder man zeichnet — wenn man den Fluchtpunkt F_{III} nicht benutzen will — das Bild vom Grundriß des Firstes in der Kellergrundrißebene. Der Spurpunkt G dieser Grundrißlinie des Firstes liegt auf der Spurlinie σ unterhalb S_f. Verbindet man G mit F_{II}, so hat man den Kellergrundriß des Firstes abgebildet. Im Punkte A schneidet dieser Grundriß die Seite 1 4, und senkrecht über diesem Punkte A liegt die obere Ecke des Giebels.

Der Punkt A halbiert die Seite 1 4; sein perspektivisches Bild liegt aber keineswegs in der Mitte zwischen 1 und 4! Diese *Halbierung* könnte man auch dadurch vornehmen, daß man im Kellergrundriß die Diagonalen zieht und ihren Schnittpunkt mit F_{II} verbindet.

Man darf auch nicht etwa, um die Dachsparren abzubilden, die Kante 1 2 im perspektivischen Bilde in drei gleiche Teile teilen, sondern muß diese Einteilung im Grundriß der Abb. 103 vornehmen,

1) Man benutzt also zum Übertragen dieser neuen Spurpunkte denselben Papierstreifen, von dem vorher die Rede war.

die Grundrisse der Dachsparren bis zur Bildebene verlängern und die so entstehenden Spurpunkte, z. B. P, in die Abb. 104 übertragen.

Sollte dagegen eine *senkrechte* Kante in gleiche Stücke geteilt werden, so könnte diese Einteilung unmittelbar im perspektivischen Bilde vorgenommen werden.

Die soeben geschilderte Methode zur Zeichnung des perspektivischen Bildes ist nicht die einzige, sondern mannigfacher *Modifikationen* fähig. Man kann z. B. die Bilder der senkrechten Kanten 2 und 4 direkt dadurch finden, daß man im Grundriß der Abb. 103 die Punkte 2 und 4 mit C^* verbindet und die Schnittpunkte (z. B. B) dieser Verbindungslinien mit der Bildebene in das perspektivische Bild überträgt; denn von C aus gesehen, erscheint die Kante 2 ja an der Stelle B der Bildebene.

Man könnte überhaupt das perspektivische Bild aller im Grund- und Aufriß gegebenen Punkte, ohne von der Theorie der Zentralprojektion Gebrauch zu machen, dadurch zeichnen, daß man die Punkte mit dem Zentrum C verbindet und die Durchstoßpunkte dieser Verbindungslinien durch die Bildebene aufsucht. Im allgemeinen würde diese Methode jedoch viel zu schwerfällig sein.

Das perspektivische Bild unseres Hauses, wie es die Abb. 104 zeigt, muß nun von einem Punkte aus betrachtet werden, der in dem Abstande d vor dem Hauptpunkt H liegt. Ist nun Grund- und Aufriß in kleinem Maßstabe gezeichnet, so kann man in der Grundrißzeichnung aus Platzmangel die *Distanz* mitunter *nicht groß genug* wählen. Man hilft sich dann so, daß man beim Übertragen von Grund- und Aufriß in das perspektivische Bild alle Maße im gleichen Verhältnis vergrößert, etwa verdoppelt. Das so entstehende Bild ist dann mit der entsprechend vergrößerten Distanz zu betrachten.

§ 4. Teilpunkte. Perspektivischer Entwurf ohne Grundriß.

Es wäre recht umständlich, wenn man von einem geplanten Bauwerk erst Grund- und Aufriß zeichnen müßte, um daraus eine perspektivische Ansicht abzuleiten. Man wird sehr häufig zuerst eine perspektivische Darstellung haben wollen, um den Eindruck zu übersehen, den der Bau macht. In der perspektivischen Skizze wird man dann den Entwurf abändern, um ihn etwa der Umgebung anzupassen, und erst zuletzt wird man die Bauzeichnung im Grund- und Aufriß herstellen.

In dem perspektivischen Bilde müssen selbstverständlich die *Proportionen des geplanten Bauwerks* richtig wiedergegeben werden, also z. B. die Verhältnisse von Länge zu Breite zu Höhe eines Hauses, denn gerade darauf wird es bei einem Entwurf, dessen

ästhetischen Eindruck man aus der Perspektive beurteilen will, ankommen.[1]) Nun kann man im perspektivischen Bilde aber nur Teilverhältnisse auf senkrechten Kanten (allgemein: auf zur Bildebene parallelen Geraden) unmittelbar eintragen. Um auch auf waagerechten Geraden eine gegebene Einteilung anzubringen, ohne auf einen Grundriß zurückzugreifen, brauchen wir ein *neues Prinzip*, das die Abb. 105 erläutern soll.

Durch eine waagerechte Gerade kann man stets eine waagerechte Ebene legen. In Abb. 105 ist diese als Grundrißebene angenommen und senkrecht dazu die Bildebene b, die als Strich erscheint. Zentrum C, Horizont und Hauptpunkt H liegen über der Grundrißebene. Vom Spurpunkte S der in unserer Grundrißebene liegenden Geraden g tragen wir nun sowohl auf der Geraden selbst, wie auch auf der in der Bildebene b liegenden Spurlinie s der Grundrißebene, gleich lange Strecken ab; z. B. $SA = SA_1$ und $SB = SB_1$. Verbinden wir nun die Endpunkte dieser Strekken durch die mit zwei Pfeilspitzen gekennzeichneten Geraden, so liegen diese Verbindungslinien ebenfalls in der Grundrißebene und bilden mit der Spurlinie s und der Geraden g gleiche Winkel, die durch Bogen bezeichnet sind.

Dies gilt für alle derartigen Verbindungslinien, welche Teilstriche kongruenter Einteilungen auf s und g verbinden. Alle diese Verbindungsgeraden sind einander parallel und haben demnach einen gemeinsamen Fluchtpunkt T, der (weil sie waagerecht sind) auf dem Horizont liegt und *Teilpunkt* genannt wird. Er wird auf dem Horizont durch eine Gerade ausgeschnitten, die durch das Zentrum C parallel zu AA_1, BB_1, ... gezogen wird.

Der Teilpunkt T kann also auch durch einen Kreisbogen gewonnen werden, der den Fluchtpunkt F der Geraden g zum Mittelpunkt und die Strecke FC zum Radius hat. Es ist nämlich $FT = FC$, weil im Dreieck CFT die (durch Bogen bezeichneten) Winkel bei C und T einander gleich sind, was aus der Parallelität von CF zu g und CT zu AA_1 folgt. Unsere Überlegung zeigt auch, daß alle parallelen Geraden einen gemeinsamen Teilpunkt haben.

Abb. 106 zeigt die *Anwendung des Teilpunktes in der perspektivischen Abbildung*. Die Spurlinie einer waagerechten Ebene sei s. In dieser Ebene liegt die Gerade g. Ihr Spurpunkt ist S, und ihr Fluchtpunkt F. Vor dem Hauptpunkt H im Abstande d liegt im Raume das Zentrum C. Nun klappen wir die waagerechte Ebene, die durch C und den Horizont geht, um diesen in die Bildebene hinein. Dabei kommt das Zentrum C an die Stelle C^0, senkrecht über H im Abstande d. Ein Kreisbogen um den Fluchtpunkt F

1) Auch bei modernen Gebäuden scheinen die Proportionen wichtiger als die Originalität zu sein.

mit dem Radius FC^0 schneidet auf dem Horizont den zur Geraden g gehörigen Teilpunkt T aus, da die umgeklappte Ebene ja das von der Abb. 105 bekannte Bild bietet.

Sollen nun auf der Geraden g von S aus gegebene Strecken abgetragen werden, so werden sie in wahrer Größe auf der Spurlinie s von ihrem Spurpunkte S aus abgesteckt; $A_1, B_1, \ldots$ seien die Teilstriche dieser Einteilung. Die Verbindungslinien dieser Teilstriche mit dem Teilpunkt T schneiden auf dem perspektivischen Bilde g der Geraden die Teilstriche AB . . . aus, wodurch die richtige Einteilung der Geraden vollzogen ist.

Bisweilen ist die Aufgabe etwas anders gestellt: Es seien A und B zwei Punkte einer waagerechten Kante, deren perspektivisches Bild bereits gezeichnet ist, und man soll die Strecke AB etwa in drei gleiche Teile teilen, oder man soll von B aus ein gegebenes Stück BC auf der Geraden abtragen. Man zieht dann die Verbindungsgeraden TA und TB bis zu den Schnittpunkten A_1 und B_1 auf der Spurlinie s und teilt die Strecke $A_1 B_1$ in drei gleiche Teile oder trägt auf s von B_1 aus die gegebene Strecke bis C_1 ab. Die Verbindungslinien der dadurch auf s entstehenden Teilstriche mit dem Teilpunkt T schneiden auf g die verlangte Einteilung aus.

Der Leser überzeuge sich noch davon, daß der Teilpunkt von waagerechten Geraden, die der Bildebene parallel laufen, der Hauptpunkt H ist.[1])

Abb. 107 zeigt die Anwendung dieses Prinzips der Teilpunkte beim *Bild einer Kirche*. Diese soll einen rechteckigen Grundriß haben. Die Breite des Langhauses soll sich zu dessen Länge wie 2 : 3 verhalten. Die Breite des Turmes soll gleich der des Langhauses sein und seine Ausdehnung in der Längsrichtung halb so groß wie seine Breite. Endlich soll die Höhe des Turmes von der Erde bis zum Dach sich zu seiner Breite wie 3 : 2 verhalten. Die Höhe des Turmdaches soll erst aus dem perspektivischen Bilde bestimmt werden. Die Höhe der Mauern des Langhauses soll gleich seiner Breite sein und die Höhe des Daches gleich der halben Breite. Diese Proportionen sind in der Abb. 107 durch Maßzahlen angegeben.

Wir beginnen mit dem Horizont, markieren den Hauptpunkt H und klappen das Zentrum nach C^0 um. Dabei ist die Distanz d so zu wählen, daß sie den bei der Betrachtung des Bildes gewünschten Augenabstand angibt. Einen Fluchtpunkt, etwa F_{I}, können wir auf dem Horizont beliebig annehmen, der andere, F_{II}, muß so gewählt werden, daß der Winkel $F_{\mathrm{I}} C^0 F_{\mathrm{II}}$ ein rechter ist. Nur dann bekommt nämlich die Kirche einen rechteckigen

1) Der Fluchtpunkt dieser Geraden „liegt im Unendlichen" und der den Teilpunkt ausschneidende „Kreisbogen" ist die Gerade CH.

Grundriß. T_{I} und T_{II} sind die Teilpunkte, die in bekannter Weise gefunden werden.

Die Bildebene denken wir uns durch die vordere Turmkante gelegt und nehmen das Bild des unteren Endpunktes E in einem Abstande unter dem Horizont an, welcher gleich der Höhe des Beobachters über dem Erdboden ist. Senkrecht über E zeichnen wir die vordere Turmkante, deren Länge vorläufig unbestimmt bleibt. Die Verbindungslinien EF_{I} und EF_{II} geben die auf dem Erdboden liegenden Kanten der Kirche.

In geeigneter Tiefe unterhalb E zeichnen wir die Spurlinie σ des Kellergrundrisses (vgl. Abb. 104), in dem die Einteilung vorgenommen wird. Vom Spurpunkt (S) aus tragen wir auf σ nach beiden Seiten mehrfach eine Einheitsstrecke 1 ab. Verbinden wir die dadurch auf σ entstehenden Teilstriche mit den Teilpunkten, so bekommt der Grundriß die vorgeschriebenen Proportionen. Die Breite der Turmfront wurde dabei gleich halbiert, um die Firste der Dächer einzeichnen zu können. Vom Kellergrundriß lotet man die Einteilung auf die von E ausgehenden Erdbodenkanten herauf und errichtet die senkrechten Kanten.

Alle *Höhenmaße* sind nun in wahrer Größe (d. h. mit der auf σ angenommenen Einheit) auf der vorderen, in der Bildebene liegenden Turmkante abzutragen. Deren Höhe bekommt drei Einheiten; die Verbindungslinien ihres oberen Endpunktes B mit den Fluchtpunkten begrenzen die beiden anderen senkrechten Turmkanten. Die Höhe des Langhauses (2 Einheiten) wird ebenfalls auf der vorderen Turmkante bis A abgetragen und dieser Punkt mit F_{II} verbunden. Der First des Kirchendaches bekommt die gleiche Höhe wie der Punkt B; seine Verlängerung trifft demnach die Front des Turmes in einem Punkte D, der die gleiche Höhe wie B hat und in der Mitte liegt. Die seitliche Lage von D ist dem Kellergrundriß zu entnehmen, wo der Halbierungspunkt bezeichnet wurde. Die *Höhe des Turmdaches* wurde willkürlich gewählt. Um sie nachträglich zu messen, überträgt man sie auf die vordere Turmkante (M als Schnitt von $F_{\mathrm{I}}G$ und EB) und findet in der Strecke BM diese Höhe zu 1,2 Einheiten. Die *Höhe des Beobachters* über dem Erdboden ist gleich dem Abstande des Eckpunktes E vom Horizont und mißt 0,55 Einheiten.

Die drei vom Punkte E auslaufenden Kanten können allgemein als *Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems* aufgefaßt werden, und man sieht, daß wir durch die Teilpunkte imstande sind, jeden durch seine Koordinaten gegebenen Raumpunkt perspektivisch abzubilden.

Bei der *perspektivischen Abbildung von Kurven* macht man hiervon Gebrauch, indem man eine hinreichende Anzahl geeignet gewählter Kurvenpunkte mit ihren Tangenten abbildet und mit dem Kurvenlineal verbindet.

So zeigt z. B. die Abb. 108, wie ein *Brückenbogen* gezeichnet wird. Die Form des Bogens ist gegeben. Man teilt seine Spannweite in gleiche Teile, trägt diese Teilung auf der Spurlinie s des Erdbodens ab und überträgt sie mittels des Teilpunktes T_{I} auf das perspektivische Bild vom Grundriß des Bogens (dunkle Punkte).

Zu jedem Teilstrich gehört eine Ordinate des Bogens. Um diese übersichtlich abgreifen zu können, wurde der Bogen unter die Spurlinie s gezeichnet.[1]) Die Längen dieser Ordinaten werden auf der vorderen, senkrechten Kante der Brücke von N aus aufgetragen und sodann die Bildpunkte des Bogens mittels des rechten Fluchtpunktes in bekannter Weise (helle Punkte) konstruiert. Eine Tangente des Bogens schneidet seine senkrechte Symmetrielinie in einem Punkte, dessen Übertragung in das perspektivische Bild dort die Tangente liefert. Der Bogen auf der Rückseite der Brücke wird mit Hilfe des linken Fluchtpunktes (der aus Platzmangel in der Abb. 108 fehlt) aus dem ersten Bogen abgeleitet.

Die perspektivischen Bilder der Kegelschnitte sind ebenfalls Kegelschnitte. Doch braucht sich ein Typ keineswegs in den gleichartigen abzubilden. Das Bild eines Kreises z. B. ist eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem der Kreis die Verschwindungsebene in keinem, einem oder zwei Punkten trifft; umgekehrt kann eine Ellipse in der Bildebene das Bild einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel sein, je nachdem die Bildellipse den Horizont in keinem, einem oder zwei Punkten schneidet.

Bei der perspektivischen Abbildung eines Kegelschnittes bildet sich aber sein Mittelpunkt im allgemeinen nicht in dem Mittelpunkt des Bildkegelschnittes ab, weil Teilverhältnisse nicht erhalten bleiben. Man operiert daher in der Perspektive nicht mit den Hauptachsen oder konjugierten Durchmessern der Kegelschnitte, sondern ist auf punktweise Konstruktion angewiesen.

§ 5. Perspektivische Schattenkonstruktion.

Der Eindruck perspektivischer Ansichten kann häufig durch Einzeichnen von Licht und Schatten verstärkt werden. Man nimmt im allgemeinen sog. *Parallelbeleuchtung* an, bei der alle Lichtstrahlen einander parallel sind. Es genügt, die Schatten zu betrachten, die von senkrechten Stäben auf eine waagerechte Ebene geworfen werden, wie es die Abb. 109 in axonometrischer Darstellung zeigt. Man sieht, daß nicht nur die (durch Pfeilspitzen gekennzeichneten) Lichtstrahlen einander parallel sind,

1) Als Hilfslinie, nicht etwa als Grund- oder Aufriß!

sondern auch die Schatten selbst. Im perspektivischen Bilde werden also die Lichtstrahlen in einem Fluchtpunkte zusammenlaufen, der hier *Sonnenpunkt* genannt wird, und die Schatten senkrechter Stäbe in waagerechten Ebenen haben einen Fluchtpunkt auf dem Horizont, der *Sonnenfußpunkt* genannt werden möge.

Abb. 109 zeigt noch, daß der Lichtstrahl durch den oberen Endpunkt eines senkrechten Stabes und dessen Schatten in éiner senkrechten Ebene liegen. Die beiden vom Zentrum parallel zum Lichtstrahl und zum Schatten gezogenen Geraden, die in der Bildebene Sonnenpunkt und Sonnenfußpunkt ausstechen, liegen also ebenfalls in éiner senkrechten Ebene, welche die Bildebene in einer senkrechten Geraden schneidet. Folglich liegen Sonnenpunkt und Sonnenfußpunkt senkrecht übereinander.

Der Sonnenpunkt kann über oder unter dem Horizont liegen, je nachdem das Licht für einen vom Zentrum nach der Bildebene blickenden Beobachter von vorne oder von hinten einfällt. Abb. 110a zeigt (in einer senkrecht zur Bildebene angenommenen Aufrißebene) die Bildebene b, eine waagerechte Ebene w und das Zentrum C; ferner einen senkrechten Stab, den durch seinen oberen Endpunkt gehenden Lichtstrahl und seinen Schatten. Der Sonnenpunkt Q wird in der Bildebene durch eine Gerade ausgestochen, die parallel zum Lichtstrahl durch C geht. Senkrecht unter Q liegt der Sonnenfußpunkt R auf dem Horizont. Der in C anzunehmende, nach b blickende Beobachter hat die Sonne vor sich.

Abb. 111a zeigt den anderen Fall, daß die Sonne hinter dem Beobachter steht, und die gleiche Konstruktion führt zu einem Sonnenpunkte Q unterhalb des Horizonts. Die Abb. 110b und 111b zeigen die entsprechenden perspektivischen Bilder. Der Schatten eines senkrechten Stabes wird also einfach gezeichnet, indem man den oberen Endpunkt des Stabes mit dem Sonnenpunkte Q und den unteren mit dem Sonnenfußpunkte R verbindet.

Fallen die *Lichtstrahlen parallel der Bildebene* ein, so gibt es weder Sonnen- noch Sonnenfußpunkt. In diesem Falle sind auch im perspektivischen Bild die Lichtstrahlen einander parallel und die Schatten senkrechter Stäbe parallel dem Horizont, wie es Abb. 112 zeigt.

Die Abb. 113 und 114 zeigen zwei einfache *Anwendungen dieser Grundsätze*. Abb. 113 stellt die Innenansicht eines Zimmers dar. Die Bildebene ist dabei einer Wand parallel angenommen. Diese Wand und das Fenster in ihr erscheinen (abgesehen vom Maßstab) in ihrer wahren Gestalt. Die Kanten der anderen Wände stehen senkrecht zur Bildebene, so daß sie den Hauptpunkt zum Fluchtpunkt haben. Durch das von vorn einfallende Licht (Q

oberhalb des Horizonts!) zeichnet sich das Fenster auf dem Fußboden und der linken Wand ab. Die Konstruktion ist wohl ohne weitere Erläuterung verständlich, wenn man bedenkt, daß waagerechte Gerade auf den Erdboden parallele Schatten werfen und senkrechte Kanten senkrechte Schatten auf senkrechte Wände.

Denkt man sich hinter dem Fenster die Meeresoberfläche, so erscheint diese durch den Horizont begrenzt, auf dem der Hauptpunkt und ein Dampfer zu sehen ist.

Abb. 114 zeigt ein *modernes Haus bei Beleuchtung von rückwärts* (Q unter dem Horizont!). Der Schatten auf dem Boden bietet nichts neues. Der Vorbau wirft aber noch Schatten auf die Vorderwand des Hauptgebäudes. Die obere Begrenzung dieses Schattens ist der Schatten der waagerechten Kante 12 des Vorbaues. Die Ecke 1 wirft ihren Schatten noch auf den Erdboden. Denkt man sich nun die Front des Hauptgebäudes nach rechts verlängert, so würde die Ecke 1 Schatten auf diese verlängerte Wand werfen und zwar in den dunklen Punkt. Da andererseits der Schatten der Kante 12 vom Punkte 2 dieser Wand ausgehen muß, ist die Verbindungslinie der beiden dunklen Punkte der gesuchte Schatten der Kante 12 auf der Vorderwand. Er ist ausgezogen, soweit er sichtbar ist.

Die *Theorie der Perspektive*, soweit sie hier herangezogen wurde, läßt sich allein aus dem Prinzip der Fluchtpunkte ableiten. Die Zeichenmethoden sind leicht aufzufassen, wenn man die Konstruktionen im Raume vor sich sieht und gewissermaßen am räumlichen Modell arbeitet.

Die *Hauptaufgabe bei der Perspektive* ist zweckmäßige Wahl von Zentrum und Achse. Es kommt hier darauf an, das abzubildende Objekt bereits vor dem Beginn der Zeichnung so deutlich mit dem geistigen Auge zu sehen, daß man die bei verschiedenen Aufnahmestandorten entstehenden Bilder beurteilen kann.

Also kommt es auch hier, ebenso wie überall in der darstellenden Geometrie, in der Hauptsache auf die innere Raumanschauung an. Hat der Leser diese beim Durcharbeiten des Buches gewonnen, so ist dessen Zweck erreicht.